Гл. ас. д-р Динко Димитров

# РАЗМИТИ ПРЕДПОЧИТАНИЯ, ЛИБЕРАЛИЗЪМ И НЕДИСКРИМИНИРАНЕ*

В статията са представени резултати, свързани с вземането на колективни решения, когато индивидуалните и колективните предпочитания са размити или интуиционистки размити. Тези резултати са свързани с анализ на либералния парадокс на А. Сен (1970) и с изискването за недискриминиране, въведено от Й. Ксу (2000). Използването на размити предпочитания позволява да бъдат доказани теореми за възможност, както и да се обогати значението на добре известни понятия в теорията на колективните решения.

JEL: D74; C10; C70

В разработката са представени резултати от областта на теорията за вземане на колективни решения, когато предпочитанията на обществото и на отделните индивиди са *размити*. Последното означава, че се позволява на отделния индивид или на обществото да не може с точност да прецени дали предпочита например алтернативата *x* пред алтернативата *y*. С други думи, предпочитането на *x* пред *y* е само *в някаква степен*, която може да приема стойности между нула (пълно непредпочитане) и едно (пълно предпочитане).

Причина за въвеждане на размити предпочитания може да бъде например комплексният характер на всяка (обществена) алтернатива. Тъй като описанието на алтернативите обикновено е богато и съдържа много елементи, когато те се преценяват, могат да съществуват аргументи както за предпочитането на дадена алтернатива, така и за нейното непредпочитане. В този смисъл предпочитането само в някаква степен може да се разглежда като претегляне на аргументите “за” и “против” една алтернатива.

*Основните насоки*, върху които ще бъде съсредоточено нашето внимание, са две. *Първата* се отнася до това дали само общественото предпочитание е размито, или се допуска размитост и на индивидуалните предпочитания. *Втората* е свързана с първичното понятие, което се използва в анализа: дали това е отношението на размито *строго* предпочитание, или на размито *слабо* предпочитание. Тук успоредно следваме и двете насоки на анализ, като *основната теза*, която защитаваме, може да бъде структурирана по следния начин:

1. Размитостта на предпочитанията позволява някои добре известни в теорията на обществения избор теореми за невъзможност да се превърнат в теореми за възможност, т.е. да бъдат получени положителни за тази теория резултати. Илюстрирането на първата част от тезата ни ще направим чрез

* Изследването е осъществено с финансовата подкрепа на Германския фонд за научни изследвания (Deutsche Forschungsgemeinschaft).

анализ на либералния парадокс на Сен[1] в условията на размити и интуиционистки размити предпочитания.[2]

2. Дори когато размиването на предпочитанията не ”произвежда” теореми за възможност, използването му позволява по-богато тълкуване на доказаните твърдения чрез разширяване на кръга от понятия, в чиито термини те са валидни. Ние ще защитим това наше твърдение най-вече на примера на въведеното от Й. Ксу понятие за недискриминиране между индивидите в обществото[3] и неговия размит вариант.[4]

## Основни определения

Въвеждането на размити и интуиционистки размити предпочитания се основава съответно на понятието за размито множество[5] и за интуиционистки размито множество[6]. Ще въведем тези понятия последователно, като с $X$ винаги ще означаваме непразното и крайно множество от алтернативи, между които се избира.

*Размити множества*. Те обобщават традиционното понятие за множество, като позволяват даден елемент да принадлежи на определено (под)множество в *някаква степен*. Казано с други думи, всяко размито подмножество $A$ представлява функция $\mu_A$: $X \to [0, 1]$. За всяко $x \in X$, числото $\mu_A(x)$ определя *степента на принадлежност* на елемента $x \in X$ към множеството $A \subset X$. Ако например $X$ е множеството от всички автомобили, а $A$ - от всички бързи автомобили, то $\mu_A(x)$ ще бъде степента, с която даден индивид е на мнение, че автомобилът $x$ в бърз. Остатъчната до единица степен ($\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$) дефинира *степента на непринадлежност* на $x \in X$ към множеството $A \subset X$. В случая размитото множество $A$ се въвежда чрез самото (субективно) определяне на степените на принадлежност за всеки елемент от множеството $X$.

Ясно е, че ако $\mu_A$ може за всяко $x \in X$ да приема *само* стойностите 0 и 1, размитото множество $A$ ще се превърне в обикновено множество в смисъл, че всеки автомобил ще е *или* бърз ($\mu_A(x) = 1$), *или* няма да е бърз ($\mu_A(x) = 0$).

---

[1] Вж. *Sen, A.* The Impossibility of a Paretian Liberal. - Journal of Political Economy 1970, N 78, 152-157.

[2] Вж. *Subramanian, S.* The Liberal Paradox with Fuzzy Preferences. - Social Choice and Welfare, 1987, N 4, 213-218; *Dimitrov, D.* The Paretian Liberal in an Intuitionistic Fuzzy Context. Discussion Paper 02-00, Ruhr-University Bochum, 2000a.

[3] Вж. *Xu, Y.* Non-Discrimination and the Pareto Principle. - The Economic Review, 2000, N 51, 54-60.

[4] Вж. *Dimitrov, D.* Fuzzy (Non-)Discrimination and the Pareto Principle. Discussion Paper 04-00, Ruhr-University Bochum, 2000b.

[5] Вж. *Zade, L.* Fuzzy Sets. - Information and Control, 1965, N 8, 338-353.

[6] *Atanassov, K.* Intuitionistic Fuzzy Sets. - Fuzzy Sets and Systems, 1986 20, 87-96; *Atanassov, K.* Intuitionistic Fuzzy Sets. Physica-Verlag, 1999.

*Интуиционистки размити множества.* При понятието за размито множество степента на непринадлежност винаги е *остатъчна* величина. С въвеждането на интуиционистки размитите множества се отчита фактът, че анализът става по-богат, ако степента на непринадлежност няма остатъчен характер. С други думи, всяко интуиционистки размито множество $K$ се характеризира чрез функциите $\mu_K$: $X \rightarrow [0, 1]$ *и* $\nu_K$: $X \rightarrow [0, 1]$, като за всяко $x \in X$ е изпълнено: $0 \leq \mu_K(x) + \nu_K(x) \leq 1$. Числата $\mu_K(x)$ и $\nu_K(x)$ се наричат съответно *степен на принадлежност* и *степен на непринадлежност* на $x \in X$ към множеството $K$, а $\pi_K(x) = 1 - \mu_K(x) - \nu_K(x)$ представлява степента на неопределеност за елемента $x$ (или още *интуиционистки размит индекс* на елемента $x$).

Ако например $K$ е множеството от всички красиви автомобили, то $<\mu_K(x), \nu_K(x)> = <0.3, 0.5>$ има следното тълкуване: със степен 0.3 даденият индивид е на мнение, че автомобилът $x$ е красив (защото има кожени седалки), а със степен 0.5 той е на мнение, че същият автомобил не е красив (защото не е кабриолет). Остатъчната степен от 0.2 означава, че с нея индивидът се колебае дали автомобилът е красив, или не, т.е. той има аргументи както за едното, така и за другото, чиято тежест не може да съпостави.

Ясно е, че ако за всяко $x \in X$ е изпълнено $\pi_K(x) = 0$, съответното интуиционистки размито множество ще се превърне в обикновено такова, т.е. интуиционистки размитите множества представляват обобщение на понятието за размито множество.

*Размити предпочитания.* Обикновено, когато индивидите сравняват две алтернативи, икономическата теория изисква от тях да могат точно да преценят дали предпочитат първата пред втората или обратно. В случая не се отчита обаче фактът, че обикновено алтернативите са достатъчно сложно дефинирани и изискването за такава точност от страна на индивидите не е много реалистично. С други думи, ако алтернативите например са $x, y \in X$, даденият индивид може да предпочита *в някаква степен както* $x$ пред $y$, *така и* $y$ пред $x$.

Казано по-точно, размитото предпочитание се дефинира като функция $\mu$: $X \times X \rightarrow [0, 1]$. За всяко $x, y \in X$ числото $\mu(x, y)$ се нарича *степен на предпочитание* на $x$ пред $y$, като $\mu(x, y) = 1$ съответства на *точното* (в смисъл на традиционно използваното) предпочитание на $x$ спрямо $y$.

*Интуиционистки размити предпочитания*. Особеното при тях се състои в това, че всяка наредена двойка $(x, y) \in X \times X$ се характеризира с две числа: $\mu(x, y)$, което се интерпретира като степен, с която $x$ се предпочита пред $y$, и $\nu(x, y)$, което е степента, с която $x$ не се предпочита пред $y$. Наличието на положителен интуиционистки размит индекс $\pi(x, y)$ може да се тълкува като съществуване на неопределеност в мнението на съответния индивид в смисъл, че се допуска възможността предпочитанието на $x$ спрямо $y$ да не е перфектно балансирано от непредпочитанието на $x$ пред $y$.

*Правила за вземане на обществени решения.* Основен въпрос в теорията на колективните решения е по какъв начин да се агрегират индивидуалните предпочитания до отношение на обществено предпочитание. Този начин се описва чрез *правило за агрегиране*, което най-често се дефинира в множеството от всички възможни профили от индивидуални предпочитания и съпоставя на всеки такъв профил определено обществено предпочитание.

Когато породеното обществено предпочитание е пълно, рефлексивно и транзитивно,[7] това правило се нарича *функция на общественото благосъстояние*. Ако пък транзитивността се замести с по-слабото изискване за ацикличност,[8] правилото за агрегиране се превръща *в правило за обществен избор*. В посочените по-нататък примери А. Сен работи с правила за обществен избор, а Й. Ксу – с функции на общественото благосъстояние.

## Строго предпочитание

Използването на *строгото* предпочитание като основна конструкция в анализа на вземането на колективни решения с размити предпочитания се характеризира с висока степен на аксиоматизация. Причината за това е, че спрямо въведеното отношение на размито предпочитание се налагат *допълнителни* ограничения, които позволяват то да бъде *наречено* строго предпочитание. ще илюстрираме това аксиоматизиране чрез анализ на *либералния парадокс на Сен.*

Несъвместимостта на слабия принцип на Парето и условието за либерализъм е анализирана от А. Сен през 1970 г. Съгласно неговото определение *условието за либерализъм* е изпълнено, ако за всеки индивид съществува поне една двойка алтернативи, така че ако индивидът предпочита първата алтернатива пред втората, обществото има същото предпочитание, и обратно.

Това условие по същество изисква всеки индивид да бъде решаващ за обществото по отношение на поне една двойка алтернативи (т.е. обществени състояния). Възможната обосновка[9] за това е, че някои обществени състояния могат да се различават по елементи, които се включват само в личната “интимна сфера” на даден индивид и следователно е напълно

[7] Една релация $R \subset X \times X$ се нарича: *пълна*, когато за всеки две различни алтернативи $x$, $y \in X$ е изпълнено $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$; *рефлексивна*, когато за всяко $x \in X$ е изпълнено $(x, x) \in R$; *транзитивна*, когато за всеки три различни алтернативи $x$, $y$, $z \in X$ от $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следва $(x, z) \in R$.

[8] *Ацикличността* изисква за всеки $m$ различни алтернативи $x^1, \dots, x^m \in X$ от $(x^l, x^{l+1}) \in P$ $(\forall\ l = 1, \dots, m-1)$ да следва $(x^m, x^1) \notin P$. В случая с $P$ е означено *строгото* предпочитание, т.е. за всеки две различни алтернативи $x$, $y \in X$ е изпълнено $(x, y) \in R$ и $(y, x) \notin R$.

[9] Вж. *Sen, A.* Liberty, Unanimity and Rights. – Economica, 1976, N 43, 217-243; *Sen, A.* Minimal Liberty. - Economica, 1992, N 59, 139-160.

обосновано правото на избор между тези две състояния да бъде предоставено на съответния индивид.[10]

Според Сен обаче горното изискване е прекалено силно и затова той го замества с по-слабо условие, наречено *минимален либерализъм* (ML): не всеки индивид, а най-малко двама трябва да бъдат решаващи за обществото по отношение съответно на поне една двойка алтернативи. Когато това условие се съпостави с предположението за неограничена дефиниционна област[11] (UD) и слабия принцип на Парето,[12] възниква парадоксът на Сен, т.е. не съществува функция на обществения избор, която едновременно да изпълнява условията UD, WP и ML.

*Размит минимален либрализъм.* В своята статия[13] относно либералния парадокс в условията на размити предпочитания С. Субраманиан използва размитото *строго* предпочитание като първично понятие.[14] Той го дефинира като размито предпочитание, изпълняващо следните *допълнителни* изисквания: *урефлексивност*, което означава, че една алтернатива не може строго да се предпочита пред себе си с каквато и да е положителна степен на предпочитание, т.е. за всяко $x \in X$ : $\mu(x, x) = 0$; *асиметричност*, което означава, че щом точно една алтернатива се предпочита пред друга, втората не трябва да се предпочита пред първата с каквато и да е положителна степен на предпочитание, т.е. за всеки две различни алтернативи $x, y \in X$ : $[\mu(x, y) = 1] \rightarrow [\mu(y, x) = 0]$; *ацикличност*, т.е. за всеки *m* различни алтернативи $x^1, \ldots , x^m \in X$ : $[\mu(x^1, x^2) > \mu(x^2, x^1)$ & $\mu(x^2, x^3) > \mu(x^3, x^2)$ & ... & $\mu(x^{m-1}, x^m) > \mu(x^m, x^{m-1})] \rightarrow \sim [\mu(x^m, x^1) = 1$ & $\mu(x^1, x^m) = 0]$. Очевидно последното условие е доста слабо изискване за ацикличност, защото изисква само “*категорично*” *незатваряне* на цикъла на предпочитание, т.е. последната алтернатива да не се предпочита пред първата със степен 1 и първата да не се предпочита пред последната със степен 0.

[10] К. Ероу (*Arrow, K.* Social Choice and Individual Vaues, 2 ed. Yale University Press, 17, 1963) дефинира понятието обществено състояние като “... пълно описание на количеството от всеки вид благо в ръцете на всеки индивид, количеството труд, предлагано от всеки индивид, количеството производствени ресурси, инвестирани във всеки вид производствена дейност, количеството от различни видове обществена активност като комунални услуги, дипломация и нейното продължение с други средства, както и издигането на статуи на велики хора.” Ако две обществени състояния се различават например само по цвета на пуловера, който аз нося в едното и в другото състояние, то изглежда естествено, когато обществото решава кое от двете състояния предпочита, решаващият глас да е моят.

[11] Т.е. в дефиниционната област на правилото за агрегиране се включват всички логически възможни профили от индивидуални предпочитания.

[12] Ако всички индивиди строго предпочитат една алтернатива пред друга, обществото също строго предпочита първата пред втората алтернатива.

[13] Вж. *Subramanian, S.* The Liberal Paradox with Fuzzy Preferences. - Social Choice and Welfare, 1987, N 4, 213-218.

[14] Вж. *Barrett, Pattanaik and Salles.* On the Structure of Fuzzy Social Welfare Functions. - Fuzzy Sets and Systems , 1986, N 19, 1-10.

Освен това Субраманиан въвежда и следните условия за *транзитивност*, т.е. за всеки три различни алтернативи $x$, $y$, $z \in X$ : $[\mu(x, y) > 0 \;\&\; \mu(y, z) > 0] \rightarrow [\mu(x, z) > 0]$ и за *транзитивност на отношението на безразличие*, т.е. за всеки три различни алтернативи $x$, $y$, $z \in X$ : $[\mu(x, y) = \mu(y, x) = \mu(y, z) = \mu(z, y) = 0] \rightarrow [\mu(x, z) = \mu(z, x) = 0]$. С други думи, транзитивността е налице, когато предпочитането на първата алтернатива пред втората с положителна степен и предпочитането на втората алтернатива пред третата отново с положителна степен влече предпочитане на първата алтернатива пред третата пак с положителна степен. При второто условие за транзитивност безразличието между две алтернативи се тълкува като *липса на строго предпочитание* в която и да било посока.

Да се обърнем към размиването на условието за минимален либерализъм и на принципа на Парето. Що се отнася до първото условие, Субраманиан го видоизменя по два начина, означени съответно като *слаб минимален либерализъм* 1 (WML1) и *слаб минимален либерализъм* 2 (WML2). В първия случай се изисква съществуването на поне двама различни индивиди $j$ и $k$ и две различни двойки алтернативи $(x, y)$ и $(w, z)$, така че: (1) $[\mu_j(x, y) = 1 \;\&\; \mu_j(y, x) = 0] \rightarrow [\mu(x, y) > \mu(y, x)]$ и (2) $[\mu_k(w, z) = 1 \;\&\; \mu_k(z, w) = 0] \rightarrow [\mu(w, z) > \mu(z, w)]$. Тук предпочитанията на индивидите са означени с $\mu_j(.,.)$ и $\mu_k(.,.)$, а на обществото с $\mu(.,.)$.

Тези две изисквания определят индивидите $j$ и $k$ като *решаващи за обществото*, когато те съответно *строго предпочитат* $x$ пред $y$ и $w$ пред $z$ със степен 1 (и само в този случай). Допълнителното $\mu_j(y, x) = 0$ (съответно $\mu_k(z, w) = 0$) е необходимо поради факта, че в размития случай е възможно даденият индивид да предпочита една алтернатива пред друга и в същото време да предпочита втората пред първата в някаква (положителна) степен. Разликата на WML2 спрямо WML1 е в това, че горните строги неравенства се заменят с нестроги.

Субраманиан прави сравнение между различните условия за минимален либерализъм и отбелязва, че WML1 е по-слабо условие от ML. Ако например предпочитанията на индивида $j$ са точни и той строго предпочита $x$ пред $y$, това означава, че степента на обществено предпочитание на $x$ пред $y$ е по-голяма от тази на $y$ пред $x$, което очевидно е по-слабо условие от изискването обществото точно и строго да предпочита $x$ пред $y$. Освен това условието WML2 е по-слабо от WML1: WML2 предполага, че например индивидът $j$ има правото на *слабо вето* (вместо този индивид да е строго решаващ) за обществото по отношение на двойката $(x, y)$.

Що се отнася до принципа на Парето, той се въвежда по следния начин: $[\forall\, i \in N : \mu_i(x, y) = 1 \;\&\; \mu_i(y, x) = 0] \rightarrow [\mu(x, y) = 1 \;\&\; \nu(x, y) = 0]$, т.е. ако всички индивиди точно предпочитат $x$ пред $y$ (и точно не предпочитат $y$ пред $x$), общественото предпочитание трябва да има същите характеристики. Това определение дава връзка между еднаквите индивидуални предпочитания и общественото предпочитание, но *само когато* индивидуалните са точни.

Резултатът от стиковането на тези понятия се състои в това, че интуицията на Сен продължава да е вярна (т.е. налице са теореми за несъществуване на правило за агрегиране което едновременно да удовлетворява принципа на Парето и условието за минимален либерализъм), когато индивидуалните предпочитания са *точни* и транзитивни и съответното отношение на безразличие също е транзитивно, но отношението на колективно предпочитание е: (1) размито строго предпочитание, като използваното условие за минимален либерализъм е WML1, или (2) размито ирефлексивно, асиметрично и транзитивно предпочитание, като използваното условие за минимален либерализъм е WML2.

Когато обаче индивидуалните вкусове се описват чрез ирефлексивни, асиметрични и транзитивни размити (а не точни) предпочитания, *съществува* правило за тяхното агрегиране до ирефлексивно, асиметрично и ациклично размито обществено предпочитание, като това правило за агрегиране изпълнява едновременно принципа на Парето и условието WML2. Тогава преходът от изложените теореми за невъзможност към теоремата за възможност става, първо, чрез разширяване на дефиниционната област на правилото (защото всяко точно (индивидуално) предпочитание е и размито, докато обратното не е вярно) и второ, чрез използване на по-слабото условие за минимален либерализъм, а именно WML2.

Във връзка с тези резултати на С. Субраманиан възникват два въпроса: как посочените теореми за невъзможност могат да се *превърнат* в теореми за възможност и дали е възможно да се *обобщи* теоремата за възможността на Субраманиан за случаите, в които възможността индивидите да са решаващи за обществото (дори и под формата на право на слабо вето) е включена в явен вид в определенията на принципа на Парето и на условието за минимален либерализъм.

*Интуиционистки размит минимален либерализъм.* За да отговорим на тези въпроси ще допуснем, че предпочитанията са интуиционистки размити. Това ще ни позволи по-прецизно да въведем силата, с която дадени индивиди (при условието за минимален либерализъм) или всички индивиди (при принципа на Парето) могат да влияят върху обществените решения.

За да направим това, ще започнем най-напред с въвеждането на интуиционистки размито *строго* предпочитание, т.е. такова, към което ще наложим и следните *допълнителни* изисквания: *ирефлексивност*, т.е. за всяко $x \in X$ : $\mu(x, x) = 0$; *асиметричност*, т.е. за всеки две различни алтернативи $x, y \in X$ : $[\mu(x, y) = 1 \ \& \ \nu(x, y) = 0] \rightarrow [\mu(y, x) = 0 \ \& \ \nu(y, x) = 1]$; *ацикличност*, т.е. за всеки *m* различни алтернативи $x^1, \dots, x^m \in X$ : $[\mu(x^1, x^2) > \nu(x^1, x^2) \ \& \ \mu(x^2, x^3) > \nu(x^2, x^3) \ \& \dots \& \ \mu(x^{m-1}, x^m) > \nu(x^{m-1}, x^m)] \rightarrow \sim [\mu(x^1, x^m) = 0 \ \& \ \nu(x^1, x^m) = 1]$.

Първите две условия (за ирефлексивност и асиметричност) са пряк превод на условията на Субраманиан, но записани за интуиционистки размития случай. Що се отнася до третото условие (за ацикличност), то е по-слабо от аналогичното условие на Субраманиан, защото във веригата $x^1, \ldots, x^m$ няма сравнение на степените на предпочитание за двойките алтернативи $(x^{p+1}, x^p)$, $p = 1, \ldots, m - 1$. Освен това ще въведем и следното условие за *транзитивност*: за всеки три различни алтернативи $x, y, z \in X$ : $[\mu(x, y) > \nu(x, y)$ & $\mu(y, z) > \nu(y, z)] \rightarrow [\mu(x, z) > \nu(x, z)]$, което е по-строго от използваното от Субраманиан.

Както и за случая с точни предпочитания, ацикличността се предполага от транзитивността. Ако например са дадени три различни алтернативи $x, y, z \in X$, поради транзитивността от $[\mu(x, y) > \nu(x, y)$ & $\mu(y, z) > \nu(y, z)]$ следва $[\mu(x, z) > \nu(x, z)]$. Ясно е, че последното неравенство не може да е изпълнено, ако $\mu(x, z) = 0$ и $\nu(x, z) = 1$.

Да преминем към условието за минимален либерализъм. При неговото дефиниране ще изискваме да съществуват поне двама различни индивиди *j* и *k* и две различни двойки алтернативи $(x, y)$ и $(w, z)$, така че: (1) $[\mu_j(x, y) = 1$ & $\nu_j(x, y) = 0] \rightarrow [\mu(y, x) < \nu(y, x)]$ и (2) $[\mu_k(w, z) = 1$ & $\nu_k(w, z) = 0] \rightarrow [\mu(z, w) < \nu(z, w)]$. Съгласно това условие, ако да кажем, индивидът *k* има точни предпочитания относно *x* спрямо *y*, степента на обществено предпочитание на *y* спрямо *x* трябва да е по-малка от тази на обществено непредпочитание на *y* спрямо *x*. С други думи, съответният индивид се характеризира с *интуиционистки размито слабо вето* относно двойката $(x, y)$.

За да се докаже съответната теорема за възможност, не е необходимо да се отслабва принципът на Парето, т.е. ще имаме отново следното определение: $[\forall i \in N : \mu_i(x, y) = 1$ & $\nu_i(x, y) = 0] \rightarrow [\mu(x, y) = 1$ & $\nu(x, y) = 0]$. Това означава, че постигането на положителен за теорията на обществения избор резултат става чрез отслабване на условието за ацикличност, както и на условието за минимален либерализъм. Освен това този резултат е налице тогава,[15] когато индивидуалните предпочитания са точни и транзитивни, както е и в оригиналния анализ на А. Сен.

За да можем обаче да постигнем *обобщение* с желаните и описани вече свойства на *положителния* резултат на С. Субраманиан, се налага да предефинираме както понятието за интуиционистки размито строго предпочитание, така и принципа на Парето и условието за минимален либерализъм. Ще се спрем малко по-подробно само на последните две условия.[16]

---

[15] Относно самото доказателство вж. *Dimitrov, D.* The Paretian Liberal in an Intuitionistic Fuzzy Context. Discussion Paper 02-00, Ruhr-University Bochum, 2000a, 15-17.

[16] Относно предефинирането на интуиционостки размитото строго предпочитание вж. пак там, 18-19.

Когато индивидуалните предпочитания са интуиционистки размити,[17] условието за минимален либерализъм ще задава връзката между поне двама различни индивиди с интуиционистки размити предпочитания и съответното общество, което се характеризира също с такива предпочитания. Носещата конструкция на тази връзка е понятието за интуиционистки размито слабо вето по отношение на съответните алтернативи.

Казано по-точно, ще изискваме съществуването на индивиди *j* и *k* и две различни двойки алтернативи (*x*, *y*) и (*w*, *z*), така че: (1) $[\mu_j(x, y) > \nu_j(x, y)] \rightarrow [\mu(y, x) \leq \nu(y, x)]$ и (2) $[\mu_k(w, z) > \nu_k(w, z)] \rightarrow [\mu(z, w) \leq \nu\ (z, w)]$. Това условие очевидно изисква, ако например индивидът *j* предпочита *x* пред *y* с по-голяма степен, отколкото непредпочита *x* пред *y*, обществото да не предпочита *y* пред *x* с по-голяма степен, отколкото е степента на непредпочитане на *y* пред *x* (интуиционистки размито слабо вето).

По аналогичния начин ще постъпим и с принципа на Парето. При предходното му въвеждане като $[\forall\ i \in N : \mu_i(x, y) = 1\ \&\ \nu_i(x, y) = 0] \rightarrow [\mu(x, y) = 1\ \&\ \nu(x, y) = 0]$ се допуска индивидуалните предпочитания на индивидите (и на обществото) да са интуиционистки размити, *но* връзката между (еднаквите) индивидуални и колективното предпочитание е налице *само когато* съответните предпочитания са *точни*. Това означава, че ако например степените на предпочитание са в интервала (0, 1), определението на принципа на Парето няма да ни казва нищо за тази връзка.

Ето защо при нетривиалния интуиционистки размит вариант на този принцип ще изискваме: $[\forall\ i \in N : \mu_i(x, y) > \nu_i(x, y)\ ] \rightarrow [\mu(y, x) \leq \nu(y, x)]$. При интерпретирането на това условие трябва да отбележим, че когато индивидуалните предпочитания са точни ($\forall\ i \in N : \mu_i(x, y) = 1\ \&\ \nu_i(x, y) = 0$), степента на унификацията на индивидите е много по-голяма, отколкото при нашето определение: ние изискваме само $\forall\ i \in N : \mu_i(x, y) > \nu_i(x, y)$.

При така въведените понятия може да се докаже,[18] че *съществува функция на обществения избор*, която съвместява принципа на Парето и условието за минимален либерализъм. Този резултат се постига чрез отслабване (и съответно обобщаване) и на двете посочени условия - принципа на Парето и условието за минимален либерализъм.

## Слабо предпочитание

Използването на размитото *слабо* предпочитание като основно понятие в анализа се характеризира с по-ниска степен на аксиоматизиране. Ще

---

[17] Припомняме, че целта ни е да обобщим положителния резултат на Субраманиан, който е в сила тогава, когато индивидуалните предпочитания са размити. Следователно е налице основание обобщаването на използваните от него понятия да става за случая, при който индивидуалните предпочитания са интуиционистки размити.

[18] Относно доказателството на това твърдение вж. *Dimitrov, D.* The Paretian Liberal in an Intuitionistic Fuzzy Context…, 21-23.

илюстрираме това, като разгледаме как в теорията на обществения избор може да се вгради понятието за недискриминиране между индивидите от страна на обществото (правилото за агрегиране). Както ще видим, теоремата за невъзможност, която е валидна при наличието на точни предпочитания, запазва валидността си и при размиване на предпочитанията, като при това обаче се постига обогатяване на понятието за (не)дискриминиране.

*Недискриминиране.* Интуицията, която стои зад понятието за недискриминиране между индивидите в дадено общество, се основава на изискването "равните да бъдат третирани равно" и може да бъде словесно описана по следния начин:[19] двама индивиди не са дискриминирани от обществото (т.е. от правилото за агрегиране), когато то или "*изпълнява*" желанията *и на двамата* или "*не ги изпълнява*".

По-конкретно, точното определение изисква да съществуват поне двама различни индивиди $j$ и $k$ и две различни двойки алтернативи ($x$, $y$), ($z$, $w$), така че да е изпълнена само една от следните три възможности:[20] (1) $[x\ P_j\ y\ \&\ z\ P_k\ w] \rightarrow [x\ P\ y\ \&\ z\ P\ w]$; (2) $[x\ P_j\ y\ \&\ z\ P_k\ w] \rightarrow [x\ I\ y\ \&\ z\ I\ w]$; (3) $[x\ P_j\ y\ \&\ z\ P_k\ w] \rightarrow [y\ P\ x\ \&\ w\ P\ z]$.

Съгласно това определение индивидът $j$ строго предпочита $x$ пред $y$, а индивидът $k$ строго предпочита $z$ пред $w$. Изпълнението на една от тези три възможности означава, че (1) щом като обществото строго предпочита $x$ пред $y$ (както това прави и индивидът $j$), то трябва строго да предпочита и $z$ пред $w$ (както това прави и индивидът $k$), за да няма дискриминиране между двамата индивиди; (2) щом като обществото е безразлично между $x$ и $y$, то трябва да е безразлично и между $z$ и $w$, пак за да няма дискриминиране между двамата индивиди; (3) щом като обществото строго предпочита $y$ пред $x$ (противно на желанието на индивида $j$), то трябва и строго да предпочита и $w$ пред $z$ (противно на желанието и на индивида $k$), за да няма дискриминиране между двамата индивиди.

Когато този принцип се комбинира с условието за неограничена дефиниционна област и със слабия принцип на Парето, се оказва, че *не съществува функция на общественото благосъстояние*, която едновременно да изпълнява горните изисквания.

*Размито* (*не*)*дискриминиране*. Понятието за недискриминиране, което беше въведено в предходния параграф, може да бъде разширено в смисъла, породен от търсенето на отговор на следните въпроси: (1) Възможно ли е да бъде избягнат горният резултат, ако се допусне в известна степен дискриминиране на индивидите, и как може това да бъде моделирано?

[19] Вж. *Xu, Y.* Цит. съч., 54-60.

[20] С $P_j$ ($I_j$) и $P_k$ ($I_k$) е означено строгото точно предпочитание (безразличие) съответно за индивидите $j$ и $k$, а с $P$ ($I$) – строгото точно обществено предпочитание (безразличие). Безразличието относно алтернативите $x, y \in X$ обикновено се дефинира като $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$.

(2) Как може с минимално допълнително структуриране да се въведе размитост в анализа? (3) Как може да се осигури съгласуваност между понятието за размито недискриминиране и размития вариант на принципа на Парето? (4) По какъв критерий да бъде изградена тази съгласуваност?

Най-напред ще отбележим, че по-нататък ще работим с точни индивидуални предпочитания (точно както и Ксу), но ще допуснем, че отношението на колективно предпочитание е размито. Казано с други думи, в случая на правилото за агрегиране ще съпоставим на всеки профил от индивидуални точни предпочитания определено размито обществено предпочитание. И тъй като все пак е необходима някаква структура на размитото предпочитание, ще приемем, че то е *размита съвместима преднаредба*, т.е. че е *рефлексивно* (за всяка алтернатива $x \in X : \mu(x, x) \in [0, 1]$) и *транзитивно* (за всеки три различни алтернативи $x, y, z \in X : [\mu(x, y) \geq \mu(y, x)$ and $\mu(y, z) \geq \mu(z, y)] \rightarrow [\mu(x, z) \geq \mu(z, x)]$). Нека да мотивираме този наш избор.

На първо място, условието за рефлексивност се различава от традиционно използваното (за всяко $x \in X : \mu(x, x) = 1$) в литературата по размити предпочитания. Ако рефлексивността се дефинира като "за всяко $x \in X : \mu(x, x) = 1$", тогава ще е налице бинарно определение: ако $\mu(x, x) \neq 1$, то размитата бинарна релация $\mu$ няма да е рефлексивна. Това обаче е в противоречие с интуицията, която стои зад въвеждането на размитите множества, а именно, че даден елемент може да принадлежи на едно множество в някаква степен. Щом се приема тази интуиция, тя трябва да бъде вградена и във всички производни понятия като например рефлексивността.

Освен това условието "за всяко $x \in X : \mu(x, x) \in [0, 1]$" позволява и по-богато интерпретиране и по-точно според А. Било: "ако даден обект напълно удовлетворява индивида, то безразличието между този обект и самия него отговаря на най-високото ниво на удовлетворение: $\mu(x, x) = 1$. И обратно, ако този обект е безинтересен, то безразличието между този обект и самия него съответства на най-ниското ниво на удовлетворение. С други думи, ако един от елементите в множеството е в нерефлексивна ситуация, това не трябва да превръща самата релация в нерефлексивна."[21]

На второ място, условието за транзитивност също се отклонява от най-често използваната максиминна транзитивност (за всеки три различни алтернативи $x, y, z \in X : \mu(x, z) \geq \min(\mu(x, y), \mu(y, z))$). А. Било отхвърля максиминната транзитивност в полза на използваното определение поради факта, че максиминната транзитивност не изпълнява условието за независимост от ирелевантните алтернативи, според което никоя трета алтернатива не трябва да участва при сравнението на други две

[21] Вж. *Billot, A.* Economic Theory of Fuzzy Equilibria. Springer-Verlag, 1995, 11.

алтернативи. Ясно е, че ако дадена релация е максиминно транзитивна, степента, с която *x* се предпочита пред *z,* зависи от *y*.

След тези първоначални бележки нека преминем към поставените четири въпроса и да започнем с принципа на Парето, който в случая ще дефинираме като: $[\forall\ i \in N : \mu_i(x, y) = 1\ \&\ \mu_i(y, x) = 0] \rightarrow [\mu(x, y) = 1\ \&\ \mu(y, x) = 0]$.

Най-напред трябва да отбележим, че тук този принцип е дефиниран с помощта на слабото предпочитание, т.е. става дума за строгия принцип на Парето.[22] Освен това горният запис означава, че на *точното* предпочитание на *x* пред *y* от страна на всички индивиди съответства *точно* обществено предпочитание на *x* пред *y*. Същевременно зад този принцип стоят следните две неявно включени в него предположения.

*Първото предположение* се състои в това, че предпочитанията на индивидите се респектират изцяло и пълно от обществото: на точното предпочитане на *x* пред *y* от всички съответства точно предпочитане на *x* пред *y* от обществото. Ако например принципът беше дефиниран като $[\forall\ i \in N : \{\mu_i(x, y) = 1\ \&\ \mu_i(y, x) = 0\}] \rightarrow [\mu(x, y) > \mu(y, x)]$, предпочитанията на индивидите (които са точни) нямаше изцяло да бъдат отчетени при формиране на общественото предпочитание, защото предпочитането на *x* пред *y* е единствено в някаква степен, която отчита само посоката на предпочитание на индивидите в смисъл на $[\mu(x, y) > \mu(y, x)]$.

*Второто неявно предположение* е включената в принципа на Парето независимост от ирелевантните алтернативи: предпочитанието на x пред y зависи само от сравнението между тях. По този начин се запазват характеристиките на принципа на Парето за точния му вариант[23] и се постига съгласуване с независимостта от ирелевантните алтернативи, включена във въведеното по-горе понятие за транзитивност. Освен това транзитивността като характеристика на едно рационално предпочитание е основна за функциите на общественото благосъстояние, с които работи и Ксу.

Нека сега да преминем към условието за недискриминиране, което за нашия случай се състои в следното: ако индивидите *j* и *k* точно предпочитат съответно *x* пред *y* и *z* пред *w* и ако обществото "изпълни" желанието на индивида *j* в смисъл, че степента на обществено предпочитание на *x* спрямо *y* е по-висока от тази на *y* спрямо *x*, то обществото трябва да "изпълни" и желанието на индивида *k* в смисъл на по-високо обществено предпочитание на *z* по отношение на *w*, отколкото на *w* по отношение на *z*. Напълно аналогично, ако обществото "откаже" в горния смисъл на първия индивид, то трябва да "откаже" в същия смисъл и на втория.

По-точно, ще изискваме да съществуват поне двама различни индивиди *j* и *k* и две различни двойки алтернативи (*x*, *y*), (*z*, *w*),

---

[22] Вж. *Sen, A.* Social Choice Theory, Ch. 22. - In: Arrow, K., Intriligator, M. (Eds.) Handbook of Mathematical Economics, Vol. 3, North-Holland, 1986, 1075.

[23] Вж. *Sen, A.* Liberty, Unanimity and Rights…, 217-243.

така че да е изпълнена само една от следните три възможности: (1) [{$\mu_j(x, y) = 1$ & $\mu_j(y, x) = 0$} & {$\mu_k(z, w) = 1$ & $\mu_k(w, z) = 0$}] $\rightarrow$ [{$\mu(x, y) > \mu(y, x)$} & {$\mu(z, w) > \mu(w, z)$}]; (2) [{$\mu_j(x, y) = 1$ & $\mu_j(y, x) = 0$} & {$\mu_k(z, w) = 1$ & $\mu_k(w, z) = 0$}] $\rightarrow$ [{$\mu(x, y) = \mu(y, x)$} & {$\mu(z, w) = \mu(w, z)$}]; (3) [{$\mu_j(x, y) = 1$ & $\mu_j(y, x) = 0$} & {$\mu_k(z, w) = 1$ & $\mu_k(w, z) = 0$}] $\rightarrow$ [{$\mu(x, y) < \mu(y, x)$} & {$\mu(z, w) < \mu(w, z)$}].

По отношение на така дефинираното понятие за недискриминиране могат да бъдат разграничени три основни момента, по които то се различава от понятието, въведено от Ксу:

1. Това условие е по-слабо от съответното при Ксу, защото на точното предпочитание на една алтернатива пред друга - за индивидите *j* и *k,* съответства обществено предпочитание на едната пред другата алтернатива *само в някаква степен*. При това посоката на предпочитание се запазва: например за индивида *j* на $\mu_j(x, y) = 1 > 0 = \mu_j(y, x)$ съответства обществено предпочитание $\mu(x, y) > \mu(y, x)$. Същото е налице и когато обществото "отказва" да изпълни желанията на индивидите.

2. Въпреки посоченото смисълът на недискриминирането се запазва. Например, когато индивидите *j* и *k* точно предпочитат съответно *x* пред *y* и *z* пред *w*, обществото предпочита в по-голяма степен не само *x* пред *y*, отколкото *y* пред *x*, но и *z* пред *w*, отколкото *w* пред *z*.

3. Освен това в нашия вариант на условието е включена възможността и за *минимално дискриминиране* между индивидите. Това най-лесно може да се види при втората възможност, включена в условието: [{$\mu_j(x, y) = 1$ & $\mu_j(y, x) = 0$} & {$\mu_k(z, w) = 1$ & $\mu_k(w, z) = 0$}] $\rightarrow$[{$\mu(x, y) = \mu(y, x)$} & {$\mu(z, w) = \mu(w, z)$}]. Ако например имаме $\mu(x, y) = \mu(y, x) = 0.2$ и $\mu(z, w) = \mu(w, z) = 0.9$, индивидите ще бъдат третирани като равни от обществото, защото степените на обществено предпочитание се изравняват и за двамата индивиди. От друга страна обаче, това равно третиране се подкопава от факта, че равнищата на обществено предпочитание от 0.2 и 0.9 са на различно разстояние от *индивидуалните* точни предпочитания.

При така въведените понятия може да се докаже, че *не съществува правило за агрегиране*, което едновременно да изпълнява принципа на Парето и условието за размито минимално недискриминиране.[24] С други думи, негативният резултат на Ксу се запазва дори и когато се разшири областта от стойности, които може да приема правилото за агрегиране. Освен това разширението е и по линията на самото понятие за недискриминиране.

*

Размиването на индивидуалните и обществените предпочитания в теорията на вземането на колективни решения се основава на сложността на

[24] Относно точното доказателство вж. *Dimitrov, D.* Fuzzy (Non-)Discrimination and the Pareto Principle…, 13-15.

всяка обществена алтернатива, както и на ограничената възможност на индивидите да претеглят прецизно аргументи "за" и "против" дадена алтернатива. Както видяхме от нашия анализ, резултатът от използването на такъв вид предпочитания е повече от обнадеждаващ: първо, постига се *разширяване* на дефиниционната област на правилото за агрегиране, на областта от стойности, които може да приема това правило, или и на двете области едновременно; второ, предефинирането на понятия в термините на размити предпочитания означава обогатяване на *значението* на самите понятия; трето, доказват се теореми за *възможност* като аналози на теореми за невъзможност за случаите, в които предпочитанията са точни.

Накрая ще посочим и някои бъдещи изследователски насоки в тази област. Те са свързани най-вече с различните възможни варианти при факторизирането[25] както на размитото слабо предпочитание, така и на интуиционистки размитото слабо предпочитание. Това позволява да се намали степента на аксиоматизиране на анализа за сметка на по-ясното мотивиране на въвеждане на едно или друго факторизиране. Основните резултати, които се постигат по този начин, са различни размити варианти на теоремата за невъзможността на Ероу, нейното отслабване до съществуване на почти перфектни диктатори, както и доказване съществуването на размити олигархични групи.[26]

Що се отнася до факторизирането на интуиционистки размитото предпочитание[27], тук възможностите са свързани най-вече с по-финото структуриране на анализа при изследване на различни видове диктаторски правила за агрегиране, както и на степените на влияние, които имат различните коалиции в обществото.

4.X.2000 г.

---

[25] Под термина *факторизиране* се разбира възможното извличане на отношението на строго предпочитание и на безразличие от разглежданото като първично отношение на слабо предпочитание.

[26] Вж. *Banerjee, A.* Fuzzy Preferences and Arrow-type Problems in Social Choice. - Social Choice and Welfare, 1994 N 11, 121-130; *Dasgupta, M., R. Deb.* Transitivity and Fuzzy Preferences. - Social Choice and Welfare, 1996, N 13, 305-318; *Dutta, B.* Fuzzy Preferences and Social Choice. - Mathematical Social Sciences, 1987, N 13, 215-229; *Ovchinnikov, S.* Structure of Fuzzy Binary Relations. - Fuzzy Sets and Systems, 1981, N 6, 169-195; *Richardson, G.* The Structure of Fuzzy Preferences: Social Choice Implications. - Social Choice and Welfare, 1998, N 15, 359-369.

[27] Вж. *Dimitrov, D.* Intuitionistic Fuzzy Preferences: A Factorization. Discussion Paper 05-00, Ruhr-University Bochum, 2000c.