Гл. ас. Росен Николаев

УСЛОВИЯ ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ НА ОПТИМАЛЕН ДВУАКТИВЕН ПОРТФЕЙЛ

Разгледани са някои аспекти, свързани с двуактивен портфейл от акции. Дефинирани са понятията σ- и V-портфейл и респективно σ- и V-оптимален портфейл. Формулирано е и е доказано твърдение за съществуване на V-двуактивни портфейли. Изведени са някои условия, при наличието на които между акциите на две компании от съществуване на V-портфейли следва съществуване на σ-портфейли, както и обратното. Получените теоретични резултати са приложени за изследване на съществуването на σ- и V-портфейли между някои акции на фондовия пазар в България за десет от най-котираните компании.

JEL: C61; D81; G11

Един от основните проблеми в теорията на инвестициите е за създаване, поддържане и управление на ефективен портфейл от активи. Инвеститорите се стремят към формиране на такъв комплекс от инвестиции, който да им носи максимална възвръщаемост при минимален риск. Всяко действие е свързано с постигане на някаква цел и на преден план стои въпросът за риска, който се поема в процеса на реализиране на съответната операция.

Една от най-рисковите сфери на икономическия живот са финансовите пазари. В процеса на все по-пълното им навлизане в обществото се изграждат и развиват редица теории за намаляване на риска. В теорията и съответно в практиката в това отношение са се утвърдили три основни подхода при инвестирането на парични средства:

1. Поделяне на риска между няколко инвеститори.
2. Инвестиране не в един, а в няколко активи (диверсификация).
3. Разпределяне на риска във времето (хеджиране). Това се постига с различните производни финансови инструменти - форуърди, суапове, фючърси, опции.

Ефектът на диверсификация се постига чрез създаване на портфейли от различни активи.

Управлението на портфейла е от първостепенно значение за финансовите мениджъри. Основите на съвременната теория на портфейла са поставени през 1952 г. от проф. Хари Марковиц (Markowitz, 1952).

Същността на теорията се състои в схващането, че богатството не трябва да се разпределя в максимален брой инвестиционни носители, а само в определени такива (Дочев, 2001). Измерител на рисковаността на един портфейл не може да бъде единствено средното претеглено стандартно отклонение или дисперсията на отделните активи, а е необходим и допълнителен показател.

Приемайки за такъв показател ковариацията, Марковиц за пръв път насочва вниманието на инвеститорите не към броя на активите, а към техния вид и взаимовръзките между тях. Ковариацията е измерител на степента, с която два вариационни реда се движат заедно. В инвестиционната практика тези редове са всъщност нормите на възвръщаемост.

При съставяне на един портфейл различните инвеститори си поставят за цел да постигнат оптимален ефект по някои от следните критерии:

- максимална възвръщаемост при определено равнище на риска;
- минимален риск при определена възвръщаемост;
- портфейл, максимално близък по характеристики до пазарния;
- получаване на риск, по-малък от рисковете на отделните активи;
- получаване на минимален риск на единица възвръщаемост и др.

Тук вниманието е насочено към последните два критерия.

Известно е, че общият риск на портфейла може да бъде по-малък от рисковете на отделните активи (Боди и др., 2000; Галиц, 1994; Драганов и др., 1993; Шарп и др., 1999). Когато коефициентът на корелация между два актива е по-малък от единица, е възможно да се постигне такъв портфейлен риск. Практиката показва, че понякога минималният портфейлен риск е този на най-малко рисковия актив. Освен това в редица случаи портфейлният коефициент на вариация (рискът, съответстващ на единица възвръщаемост) не може да бъде направен по-малък.

В основата на портфейлния анализ стои двуактивният портфейл. В литературата не е известно да се посочва кога може и кога не може да се създаде портфейл от два актива, така че да се постигне намаляване на коефициента на вариация.

В отделна разработка (Николаев, 2000; 2001) сме извели зависимост между коефициента на корелация и отношенията на рисковете на отделните активи, при които е възможно получаване на портфейлен риск, по-малък от индивидуалните рискове на съставящите го активи. Когато това условие е нарушено, постигането на този ефект е невъзможно.

От особена важност е постигането не само на намаляване на риска, а намаляване на този, съответстващ на единица възвръщаемост. Това се изразява с коефициента на вариация. Може да се постави въпросът дали съществува условие, подобно на изведеното от нас (Николаев, 2000; 2001), за коефициента на вариация, обвързан с коефициентите на вариация на отделните активи.

Под оптимален двуактивен портфейл тук ще разбираме такъв, на който или минималният риск е по-малък от тези на отделните активи, или минималният коефициент на вариация е по-малък от коефициентите на вариация на съставящите го активи.

Целта тук е да отговорим на въпроса кога е възможно (невъзможно) съставяне на оптимален двуактивен портфейл?

За постигане на така заложената цел трябва да бъдат решени основните задачи, свързани с:

• оценяването на коефициента на корелация между възвръщаемостите на два актива;

• откриването на връзка между оптимален двуактивен портфейл по отношение на риска и оптимален двуактивен портфейл по отношение на коефициента на вариация;

• изследването на тези зависимости между акциите на компании, котирани на Българската фондова борса (БФБ).

За решаване на посочените задачи са формулирани и доказани три основни твърдения. Изведените резултати са подкрепени с примери. Накрая са изследвани зависимостите между всеки две от общо десет от най-котираните компании, включени на БФБ.

1. Оценка на коефициента на корелация в двуактивен портфейл

Първо ще въведем следните означения:

$\bar{r}_i$ *е очакваната (средната) възвръщаемост (в %) от акциите на ī ^{ma} компания (i = 1,2);*

σ_i^2 *- дисперсията на ī ^{ma} акция (i = 1,2);*

σ_i *- рискът на ī ^{ma} акция (i = 1,2);*

x - частта от общата инвестиция за закупуване на акции от първата компания ($x \in [0,1]$ *);*

ρ_{12} *- коефициентът на корелация между възвръщаемостите на двете акции;*

cov (r_1, r_2) – ковариацията между възвръщаемостите на двете акции;

V_i - коефициентът на вариация на ī ^{ma} акция (i = 1,2);

$\bar{r}_p$ *- очакваната (средната) портфейлна възвръщаемост;*

σ_p *- портфейлният риск;*

V_i - коефициентът на вариация на портфейла.

От теорията за двуактивен портфейл (Боди и др., 2000; Шарп и др., 1999) са изведени следните формули:

(1) $$\bar{r}_p = x\bar{r}_1 + (1-x)\bar{r}_2 = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2)x + \bar{r}_2;$$

(2) $$\sigma_p = [x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\operatorname{cov}(r_1, r_2)]^{1/2};$$

(3) $$\operatorname{cov}(r_1, r_2) = \sigma_1\sigma_2\rho_{12};$$

(4) $$V_i = \frac{\sigma_i}{\bar{r}_i}, i = 1,2;$$

(5) $$V_p = \frac{\sigma_p}{\bar{r}_p}.$$

Беше казано какво ще разбираме под оптимален портфейл. С цел да бъдат разграничени двата случая ще въведем следните определения:

Определение 1:

σ-портфейл - портфейл, на който рискът е по-малък от рисковете на съставящите го активи.

С други думи, под σ-портфейл ще разбираме такъв, за който:

(6) $\sigma_p < \sigma_i$, i = 1,2.

Определение 2:

σ-оптимален портфейл – σ-портфейл с най-малък риск.

Определение 3:

V-портфейл – портфейл, на който коефициентът на вариация е по-малък от коефициентите на вариация на съставящите го активи. Или V-портфейлът е такъв, за който:

(7) $V_p < V_i$, i =1,2.

Определение 4:

V-оптимален портфейл – V-портфейл с минимален коефициент на вариация.

Ясно е, че ако $\sigma_i = 0$ за някое i = 1,2, то не съществува и σ-портфейл, и V-портфейл.

Поради това ще смятаме, че $\sigma_i > 0$, i = 1,2, т.е. и двата актива са рискови.

В нашата разработка (Николаев, 2000; 2001) сме формулирали и доказали условия, при които съществува σ-портфейл, а именно:

(8) $$\rho_{12} < \min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\};$$

(9) $$\operatorname{cov}(r_1, r_2) < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}.$$

Условията (8) и (9) са еквивалентни. Когато са нарушени, не съществува σ-двуактивен портфейл.

Тук ще направим опит да изведем зависимост, подобна на (8), между коефициента на корелация и коефициентите на вариация на двата актива.

Като се вземат предвид (1), (2) и (3), (5) приема вида:

$$(10) \qquad V_p(x) = \frac{[x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}]^{1/2}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)x + \bar{r}_2}.$$

След извършване на преобразувание в числителя, (10) придобива вида:

$$(11) \quad V_p(x) = \frac{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12})x^2 + 2\sigma_2(\sigma_1\rho_{12} - \sigma_2)x + \sigma_2^2]^{1/2}}{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)x + \bar{r}_2}.$$

За извеждането на теоретичните резултати в разработката е необходимо да се пресметне производната на $V_p(x)$. Тази производна има вида:

$$(12) \; V_p'(x) = \frac{[\sigma_1^2\bar{r}_2 + \sigma_2^2\bar{r}_1 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)]x - \sigma_2(\sigma_2\bar{r}_1 - \sigma_1\rho_{12}\bar{r}_2)}{[(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)x + \bar{r}_2]^2.[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12})x^2 + 2\sigma_2(\sigma_1\rho_{12} - \sigma_2)x + \sigma_2^2]^{1/2}}$$

Тъй като от практическа гледна точка компании, чиито акции имат отрицателна или нулева очаквана възвръщаемост не представляват интерес, то в разработката ще разглеждаме само случая, когато $\bar{r}_1 > 0$ и $\bar{r}_2 > 0$.

На второ място ще разглеждаме само случая, когато $x \in [0,1]$, т.е. забранени са "късите" продажби.

При тези условия лесно можем да отбележим, че функцията $V_p(x)$ е непрекъсната в интервала [0,1]. И наистина на първо място подкоренната величина е σ_p^2, което е портфейлната дисперсия и тя винаги е неотрицателна. Второ, знаменателят приема стойност нула при:

$$x_0 = \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}, \text{ ако } \bar{r}_2 \neq \bar{r}_1.$$

Тази стойност при $\bar{r}_1 > \bar{r}_2 > 0$ е отрицателна, а при $\bar{r}_2 > \bar{r}_1 > 0$ е по-голяма от единица. И в двата случая $x_0 \notin [0,1]$.

$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 = 0$, но този случай сме го изключили.

Горните разсъждения показват, че $V_p(x)$ е непрекъсната в интервала [0,1]. Но от това следва, че функцията $V_p(x)$ достига най-малка стойност в интервала [0,1].

От (11) се вижда, че:

$V_p(0) = V_2$ и $V_p(1) = V_1$.

За да съществува V-портфейл, трябва $V_p(x)$ да достига най-малката си стойност в точка, вътрешна за интервала [0,1]. Това означава, че $V_p(x)$ трябва да има локален минимум в (0,1).

Преди да формулираме първото основно твърдение, ще покажем, че когато $\bar{r}_i > 0$, (i = 1,2), е в сила неравенството:

$$\frac{\sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2}{\sigma_1 V_2 + \sigma_2 V_1} \geq \min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\}. \tag{13}$$

Ще го докажем в случая, когато $V_1 \leq V_2$ (при $V_1 \geq V_2$ се доказва по аналогичен начин).

Тогава

$$\min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\} = \frac{V_1}{V_2}$$

и тъй като $r_i>0$ (i =1,2), то $V_i>0$ (i =1,2).

От $V_1^2 \leq V_2^2$, след като умножим двете страни със σ_2 ($\sigma_2>0$) следва, че

$\sigma_2 V_1^2 \leq \sigma_2 V_2^2$ и

$V_1 V_2 \sigma_1 + \sigma_2 V_1^2 \leq V_1 V_2 \sigma_1 + \sigma_2 V_2^2$.

След като разделим последното неравенство на положителния израз $V_2(\sigma_1 V_2 + \sigma_2 V_1)$, получаваме:

$$\frac{V_1}{V_2} \leq \frac{\sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2}{\sigma_1 V_2 + \sigma_2 V_1},$$

с което е доказано неравенство (13).

След тази предварителна подготовка ще преминем към извеждане на зависимостта между коефициента на корелация и коефициентите на вариация на двата актива, при която съществува V-портфейл.

<u>Твърдение 1:</u> Функцията $V_p(x)$ има локален минимум в интервала (0,1), ако е изпълнено условието:

$$\rho_{12} < \min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\}. \tag{14}$$

Доказателство: Необходимото условие $V_p(x)$ да има локален екстремум при $x=x_0$ е $V_p'(x_0) = 0$. Като се вземе предвид (12), определяме:

$$x_0 = \frac{\sigma_2(\sigma_2 \bar{r}_1 - \sigma_1 \rho_{12} \bar{r}_2)}{\sigma_1^2 \bar{r}_2 + \sigma_2^2 \bar{r}_1 - \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}. \tag{15}$$

Нека да разделим числителя и знаменателя в представянето на x_0 в (15) на $\bar{r}_1.\bar{r}_2$. Тогава за x_0 получаваме:

(16) $$x_0 = \frac{V_2\sigma_2 - V_1\sigma_2\rho_{12}}{V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 - V_2\sigma_1\rho_{12} - V_1\sigma_2\rho_{12}}.$$

За да бъде екстремумът минимум, трябва коефициентът пред x в числителя на (12) да е положителен, откъдето следва:

$$V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 - \rho_{12}(V_2\sigma_1 + V_1\sigma_2) > 0,$$

или тъй като $V_i > 0$, i = 1,2, то

(17) $$\rho_{12} < \frac{V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2}{V_1\sigma_2 + V_2\sigma_1}.$$

За да принадлежи критичната точка x_0 на интервала (0,1), т.е. $0<x_0<1$, то трябва да е в сила системата:

$$\left| \begin{array}{l} V_2\sigma_2 - V_1\sigma_2\rho_{12} > 0 \\ V_2\sigma_2 - V_1\sigma_2\rho_{12} < V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 - \rho_{12}(V_1\sigma_2 + V_2\sigma_1), \end{array} \right.$$

или след преобразуване на двете неравенства, получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} \rho_{12} < \dfrac{V_2}{V_1} \\ \rho_{12} < \dfrac{V_1}{V_2}. \end{array} \right. .$$

От двете неравенства лесно се вижда, че достигаме до неравенството (14), т.е.

$$\rho_{12} < \min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\}.$$

От доказаното неравенство (13) следва:

$\rho_{12} < \min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\} \le \frac{V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2}{V_1\sigma_2 + V_2\sigma_1}$, т.е. е в сила и изискването (17).

Така като условие за ρ_{12} остава само неравенство (14). С това твърдението е доказано.

Този локален минимум е единствен и представлява и най-малка стойност на функцията $V_p(x)$.

Трябва да отбележим, че при $x = x_0$, ако е налице условие (14), то не само съществува V-портфейл, но той е V-оптимален.

И така, ако е изпълнено условие (14), то определената посредством (16) стойност x_0 е от интервала (0,1) и $V_p(x_0) < \min\{V_1, V_2\}$.

Последното показва, че съществува реална зависимост между инвестициите в двата актива, при която може да се формира V-оптимален портфейл.

Лесно можем да забележим, че при еднакви рискове на акциите, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2$, условието (14) приема вида:

$$\rho_{12} < \min\left\{\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}, \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1}\right\},$$

а при еднакви очаквани възвръщаемости, т.е. $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$, се получава точно неравенство (8).

Полученият резултат за оценката на коефициента на корелация и неговата приложимост ще илюстрираме с един пример.

Нека за акциите на две компании е известно:

$$\bar{r}_1 = 10\%$$

$$\sigma_1 = 5\%$$

$$\bar{r}_2 = 8\%$$

$$\sigma_2 = 3\%$$

Тогава за коефициентите на вариация получаваме:

$$V_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{r}_1} = \frac{5}{10} = 0{,}5;$$

$$V_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{r}_2} = \frac{3}{8} = 0{,}375,$$

откъдето

$$\min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{0{,}375}{0{,}5} = 0{,}75.$$

От твърдение 1 следва, че ако $\rho_{12} < 0{,}75$ (което допуска значително големи положителни стойности за ρ_{12}), то при

$$x_0 = \frac{0{,}375.3 - 0{,}5.3.\rho_{12}}{0{,}5.5 + 0{,}375.3 - \rho_{12}(5.0{,}375 + 3.0{,}5)}$$ може да се формира V-оптимален двуактивен портфейл.

Например, ако $\rho_{12} = 0{,}7$, ще получим $x_0 = 0{,}0594$, т.е. ако от целия инвестиционен капитал 5,94 % се инвестират в първия актив и останалите

94,06 % - във втория, ще се получи най-малкият портфейлен коефициент на вариация и той ще бъде:

$V_p(0,0594) = 0,3162$, което е по-малко от 0,375.

Така създаденият портфейл е V-оптимален.

За същия пример $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1,67;\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,6$ и като се вземе предвид (8), следва, че ако $\rho_{12} < 0,6$ съществува σ-портфейл.

При това може да обобщим:

За $\rho_{12} < 0,6$ съществува $x_{01} \in (0,1)$, така че $\sigma_p < \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$ и съществува $x_{02} \in (0,1)$, така че $V_p < \min\{V_1, V_2\}$.

За $\rho_{12} \in [0,6;0,75)$ съществува $x_0 \in (0,1)$, така че $V_p < \min\{V_1, V_2\}$, но не съществува $x \in (0,1)$, за което $\sigma_p < \min\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

За $\rho_{12} \in [0,75;1]$ не съществуват стойности за $x \in (0,1)$, при които да се получи или σ-портфейл, или V-портфейл.

Ако за двата актива е изпълнено $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ и $\sigma_1 < \sigma_2$ и не се отчете взаимовръзката между двата, изразена чрез коефициента на корелация между тях, то вторият би бил отхвърлен, тъй като има по-малка очаквана възвръщаемост, а по-голям риск. Не до такъв извод бихме стигнали винаги, ако изследваме зависимостите (8) и (14).

Нека например:

$\bar{r}_1 = 5\%$

$\sigma_1 = 2\%$

$\bar{r}_2 = 6\%$

$\sigma_2 = 8\%$

тогава

$$\min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\} = 0,25;$$

$$\min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\} = 0,15\ .$$

Досегашните разсъждения показват, че ако $\rho_{12} < 0,15$, то може да се формира σ-оптимален, както и V-оптимален портфейл. Ако

$\rho_{12} \in [0{,}15;0{,}25)$, може да се формира само σ-оптимален и ако $\rho_{12} \geq 0{,}25$, то тогава не съществуват нито σ-, нито V-портфейли.

Това показва, че не е целесъобразно подобен актив да бъде отхвърлен без допълнителен анализ на взаимовръзките.

2. Зависимости между σ- оптималност и V- оптималност

Двата примера в края на първи раздел предизвикват търсене на отговор на въпроса кога от съществуване на σ-оптималност следва съществуване на V-оптималност, както и обратното?

Нека отново

(18) $\bar{r}_i > 0$ и $\sigma_i > 0, i = 1{,}2$.

<u>Твърдение 2:</u> Ако $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ и $\sigma_1 < \sigma_2$ ($\bar{r}_1 < \bar{r}_2$ и $\sigma_1 > \sigma_2$), то от съществуването на V-оптимален портфейл следва съществуване на σ-оптимален.

Доказателство: Нека приемем, че са изпълнени условията $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$ и $\sigma_1 < \sigma_2$. Тогава $\frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} < 1$ и $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. От съществуването на V-оптимален портфейл следва, че $\rho_{12} < \min\left\{\frac{V_2}{V_1}, \frac{V_1}{V_2}\right\}$ и $\rho_{12} < \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sigma_1 \bar{r}_2}{\sigma_2 \bar{r}_1} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

Аналогично се доказва и случаят $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$ и $\sigma_1 > \sigma_2$.

С това показахме, че $\rho_{12} < \min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}$, или е налице съществуване на σ-оптимален портфейл.

Това твърдение показва, че ако между рисковете и очакваните възвръщаемости на акциите на две компании неравенствата са обратни, то ако съществува възможност за намаляване на коефициента на вариация, следва, че съществува възможност и за намаляване на риска. Вторият пример, който беше разгледан, илюстрира резултата от това твърдение.

Нека въведем следните означения:

$$\min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\} = MV_0,$$

$$\min\{V_1, V_2\} = V_0$$

$$\min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2},\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}=M\sigma_0,$$

$$\min\{\sigma_1,\sigma_2\}=\sigma_0$$

Освен това нека $\bar{r}_i > 0$ и $\sigma_i > 0, i=1,2$, като $(\sigma_1-\sigma_2)(\bar{r}_1-\bar{r}_2)<0.$ Тогава като следствие от твърдение 2 може да се направи следното обобщение:

1. При $\rho_{12}<MV_0$ съществуват x_1 и x_2 от интервала (0,1), такива че: $V_p(x_1) < V_0$ и $\sigma_p(x_2) < \sigma_0$.

2. При $\rho_{12}\in[MV_0, M\sigma_0)$ съществува $x_1\in(0,1)$, такива че $\sigma_p(x_1) < \sigma_0$, но не съществува $x\in(0,1)$, за което $V_p(x) < V_0$.

3. При $\rho_{12}\in[M\sigma_0, 1]$ не съществува $x\in(0,1)$, за което $V_p(x) < V_0$ или $\sigma_p(x) < \sigma_0$.

<u>*Твърдение 3:*</u> Нека са в сила:

1. Условия (18);

2. $(\sigma_1-\sigma_2)(\bar{r}_1-\bar{r}_2)>0;$

(19) 3. $\rho_{12}<\min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2},\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\};$

4. $\frac{\sigma_1^2}{\bar{r}_1}<\frac{\sigma_2^2}{\bar{r}_2}\left(\frac{\sigma_1^2}{\bar{r}_1}>\frac{\sigma_2^2}{\bar{r}_2}\right).$

Тогава е в сила $\rho_{12}<\min\left\{\frac{V_1}{V_2},\frac{V_2}{V_1}\right\}.$

Доказателство: Нека $\bar{r}_1<\bar{r}_2$ и $\sigma_1<\sigma_2$. Тогава $\frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1}>1$ и от условие 3 на (19) следва

$$\rho_{12}<\frac{\sigma_1}{\sigma_2}<\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.\frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1}=\frac{V_1}{V_2}, \text{ или}$$

(20) $$\rho_{12}<\frac{V_1}{V_2}.$$

От условие 4 на (19) имаме

$\frac{\sigma_1^2}{\bar{r}_1} < \frac{\sigma_2^2}{\bar{r}_2}$, откъдето $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \frac{\sigma_2 \bar{r}_1}{\sigma_1 \bar{r}_2} = \frac{V_2}{V_1}$, но $\rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, откъдето следва

(21) $$\rho_{12} < \frac{V_2}{V_1}.$$

От (20) и (21) получаваме исканото неравенство

$$\rho_{12} < \min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\}.$$

Условие 2 в (19) показва, че очакваните възвръщаемости и рисковете на акциите на две компании са свързани с еднакви по посока неравенства. Тогава, ако е изпълнено условие 4 на (19), от σ-оптималност следва V-оптималност.

За илюстриране на резултата от твърдение 3 може да използваме първия пример в предходния раздел.

$\sigma_1 > \sigma_2$ и $\bar{r}_1 > \bar{r}_2$, като $\frac{\sigma_2^2}{\bar{r}_2} = \frac{9}{8}$, а $\frac{\sigma_1^2}{\bar{r}_1} = \frac{25}{10}$ и $\frac{9}{8} < \frac{25}{10}$.

$$\min\left\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\} = 0{,}6 \qquad \min\left\{\frac{V_1}{V_2}, \frac{V_2}{V_1}\right\} = 0{,}75.$$

Ако коефициентът на корелация между двата актива ρ_{12} е по-малък от 0,6, то се вижда, че е изпълнено и $\rho_{12} < 0{,}75$. Това показва, че между каквито и да е два актива с такива очаквани възвръщаемости и с такива рискове, ако съществува σ-портфейл и е изпълнено условие 4 на (19), то съществува и V-портфейл.

За два актива, ако са налице условия (19), като следствие от твърдението може да направим обобщението, че:

1. При $\rho_{12} < M\sigma_0$ съществуват x_1 и x_2 от интервала (0,1), такива че: $V_p(x_1) < V_0$ и $\sigma_p(x_2) < \sigma_0$.

2. При $\rho_{12} \in [M\sigma_0, MV_0)$ съществува $x_1 \in (0,1)$, такива че $V_p(x_1) < V_0$ и не съществува $x \in (0,1)$, за което $\sigma_p(x) < \sigma_0$.

3. При $\rho_{12} \in [MV_0, 1]$ не съществуват стойности за x от интервала (0,1), за които $V_p(x) < V_0$ или $\sigma_p(x) < \sigma_0$.

Последните две твърдения и направените обобщения дават възможност на база пресметнати очаквани възвръщаемости, рискове и коефициента на корелация между възвръщаемостите на акциите на две компании да бъде направен извод за съществуване или несъществуване на възможности за съставяне на V- или σ-портфейл.

Трябва да отбележим, че когато са налице условия за формиране на V-портфейли или σ-портфейли, то съществува сред тях V- оптимален, респ. σ-оптимален портфейл.

С оглед прилагането на получените резултати в практиката, смятаме за целесъобразно да направим изследване върху акции, котиращи се на борсовия пазар в България.

3. V-портфейли и σ-портфейли между акции, предлагани на БФБ

Тук поставяме следните основни задачи:

1. Да бъдат пресметнати основните характеристики ($\bar{r}_i, \sigma_i$) за акциите на n на брой компании, представени на БФБ.

2. Да се пресметнат ковариациите и съответно коефициентите на корелация между възвръщаемостите на всеки две от тях.

3. Да се провери за кои двойки компании са изпълнени условие (8) или условие (14).

4. Да се направят изводи за съставяне на ефективни двуактивни портфейли.

Разглеждаме 10 компании, чиито акции са сред най-котираните на БФБ (табл. 1). Това са компаниите, които имат най-големи обороти на борсата през последните две години.[1]

Таблица 1

Наименования на компаниите и техните кодове, използвани на БФБ

№	Наименования на компаниите	Код на БФБ
1	ИД Златен лев АД	LEV
2	Софарма АД	SFARM
3	Албена Инвест Холдинг АД	ALBH
4	Доверие Обединен Холдинг АД	DOVUHL
5	Северкооп Гъмза Холдинг АД	GAMZA
6	Булгартабак Холдинг АД	BTH
7	Лук Ойл Нефтохим АД	NEFT
8	Златни пясъци АД	ZLP
9	Албена АД	ALB
10	Петрол АД	PET

[1] Подобен анализ може да бъде направен и между всеки две компании на БФБ, но тава е предмет на друга публикация.

Разглежданият период е от октомври 2001 г. до февруари 2003 г., като изходните данни са средномесечни цени на акциите в лева (табл. 2), или за всяка компания разполагаме със 17 данни.

Таблица 2

Средномесечни цени на акциите за периода октомври 2001 г. – февруари 2003 г.

Месец	*LEV*	*SFARM*	*ALBH*	*DOVUHL*	*GAMZA*	*BTH*	*NEFT*	*ZLP*	*ALB*	*PET*
А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10.2001	2.36	2.02	1.59	0.80	1.36	12.89	4.96	3.13	6.82	10.08
11.2001	2.48	1.99	1.50	0.76	1.41	13.56	5.56	3.01	6.69	9.28
12.2001	2.50	3.42	1.46	0.73	1.48	16.75	5.68	3.80	6.58	9.31
01.2002	2.51	4.76	1.51	0.79	1.50	17.33	6.47	3.67	6.62	9.48
02.2002	2.45	4.79	1.55	0.93	1.50	16.97	5.29	4.09	6.77	9.58
03.2002	2.39	4.50	1.48	0.94	1.48	16.81	5.17	4.18	6.73	10.06
04.2002	2.39	5.76	1.59	1.02	1.50	16.48	4.92	4.43	6.73	11.01
05.2002	2.34	5.79	1.57	1.10	1.50	16.06	5.22	4.46	6.91	12.22
06.2002	2.28	5.70	1.51	1.04	1.50	16.43	5.80	4.16	7.17	12.29
07.2002	2.29	6.05	1.42	0.97	1.48	16.60	5.63	4.18	6.77	11.18
08.2002	2.34	7.33	1.43	0.99	1.41	16.50	7.71	4.68	7.16	11.48
09.2002	2.35	7.62	1.41	0.98	1.38	16.59	7.15	4.32	6.80	11.65
10.2002	2.35	9.23	1.40	1.01	1.35	16.49	7.96	4.80	7.06	10.90
11.2002	2.34	10.97	1.54	1.07	1.28	17.72	8.25	6.57	8.56	12.31
12.2002	2.31	11.72	1.53	1.09	1.09	19.89	8.10	7.13	10.30	13.04
01.2003	2.34	13.64	1.51	1.01	0.91	22.47	8.03	7.25	11.82	14.46
02.2003	2.37	15.09	1.62	1.26	0.96	27.19	8.30	6.97	14.08	21.30

За изчисляване възвръщаемостта за всеки период сме използвали формулата:

(22) $$r_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}}.100,$$

където

r_i *е възвръщаемостта (в %) за* $i^{-я}$ *период,* $i = \overline{2,17}$ *;*

P_i *- цената (в лв.) за* $i^{-я}$ *период,* $i = \overline{2,17}$ *.*

Средномесечните възвръщаемости на акциите са поместени в табл. 3.

Таблица 3

Средномесечна възвръщаемост на акциите за периода октомври 2001 г. – февруари 2003 г.

Месец	*LEV*	*SFARM*	*ALBH*	*DOVUHL*	*GAMZA*	*BTH*	*NEFT*	*ZLP*	*ALB*	*PET*
а	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10.2001	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
11.2001	5.0847	-1.4852	-5.6604	-5.0000	3.6765	5.1978	12.0968	-3.8339	-1.9062	-7.9365
12.2001	0.8065	71.8593	-2.6667	-3.9474	4.9645	23.5251	2.1583	26.2459	-1.6443	0.3233
01.2002	0.4000	39.1813	3.4247	8.2192	1.3514	3.4627	13.9085	-3.4211	0.6079	1.8260
02.2002	-2.3904	0.6303	2.6490	17.7215	0.0000	-2.0773	-18.2380	11.4441	2.2659	1.0549
03.2002	-2.4490	-6.0543	-4.5161	1.0753	-1.3333	-0.9428	-2.2684	2.2005	-0.5908	5.0104
04.2002	0.0000	28.0000	7.4324	8.5106	1.3514	-1.9631	-4.8356	5.9809	0.0000	9.4433
05.2002	-2.0921	0.5208	-1.2579	7.8431	0.0000	-2.5485	6.0976	0.6772	2.6746	10.9900
06.2002	-2.5641	-1.5544	-3.8217	-5.4546	0.0000	2.3039	11.1111	-6.7265	3.7627	0.5728
07.2002	0.4386	6.1404	-5.9603	-6.7308	-1.3333	1.0347	-2.9310	0.4808	-5.5788	-9.0317
08.2002	2.1834	21.1570	0.7042	2.0619	-4.7297	-0.6024	36.9449	11.9617	5.7607	2.6834
09.2002	0.4274	3.9563	-1.3986	-1.0101	-2.1277	0.5455	-7.2633	-7.6923	-5.0279	1.4808
10.2002	0.0000	21.1286	-0.7092	3.0612	-2.1739	-0.6028	11.3287	11.1111	3.8235	-6.4378
11.2002	-0.4255	18.8516	10.0000	5.9406	-5.1852	7.4591	3.6432	36.8750	21.2465	12.9358
12.2002	-1.2821	6.8368	-0.6494	1.8692	-14.8438	12.2461	-1.8182	8.5236	20.3271	5.9301
01.2003	1.2987	16.3823	-1.3072	-7.3395	-16.5138	12.9713	-0.8642	1.6830	14.7573	10.8896
02.2003	1.2821	10.6305	7.2848	24.7525	5.4945	21.0058	3.3624	-3.8621	19.1201	47.3029

За всяка акция средната възвръщаемост за целия период, дисперсията, рискът и коефициентът на вариация са поместени в табл. 4. От данните в нея се вижда, че средната (очаквана) възвръщаемост на акциите на GAMZA е отрицателна – 1.96%. Вече отбелязахме, че такива акции не представляват интерес за нас и поради това можем да изключим тази компания от по-нататъшния анализ.

На табл. 5 са поместени корелационните коефициенти между всеки две компании. Известно е, че корелационната матрица е симетрична.

За проверка верността на неравенства (8) и (14) е необходимо да разполагаме със стойностите, които се получават от отношенията между рисковете и отношенията на коефициентите на вариация между всеки две акции (вж. табл. 6 и 7).

Таблица 4

Средна възвръщаемост ($\bar{r}_i$), дисперсия (σ_i^2), риск (σ_i) и коефициент на вариация (V_i) на акциите за периода октомври 2001 г. – февруари 2003 г.

Характеристики/ Компании	*LEV*	*SFARM*	*ALBH*	*DOVUHL*	*GAMZA*	*BTH*	*NEFT*	*ZLP*	*ALB*	*PET*
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{r}_i$ (%)	0,0449	14,7613	0,2217	3,2233	-1,9627	5,0634	3,9020	5,7280	4,9749	5,4398
σ_i^2	3,7246	360,5893	21,4132	74,1307	35,3424	63,7676	137,8660	136,4800	74,3548	157,5325
σ_i (%)	1,9299	18,9892	4,6274	8,6099	5,9450	7,9855	11,7416	11,6825	8,6229	12,5512
V_I	42,9975	1,2864	20,8692	2,6711	-3,0290	1,5771	3,0091	2,0395	1,7333	2,3073

Таблица 5

Корелационна матрица на възвръщаемостите на акциите

Компания/ Компания	*LEV*	*SFARM*	*ALBH*	*DOVUHL*	*GAMZA*	*BTH*	*NEFT*	*ZLP*	*ALB*	*PET*
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LEV	1	0,239415	-0,070110	-0,213100	0,124892	0,300605	0,425197	-0,075040	-0,063850	-0,047250
SFARM	0,239415	1	0,241037	-0,049430	0,188086	0,498828	0,186505	0,500718	-0,050730	-0,026710
ALBH	-0,070110	0,241037	1	0,722820	0,050302	0,128685	-0,064110	0,405426	0,550444	0,623532
DOVUHL	-0,213100	-0,049430	0,722820	1	0,339192	0,038839	-0,179150	0,049939	0,336568	0,684994
GAMZA	0,124892	0,188086	0,050302	0,339192	1	-0,025590	0,048212	-0,121620	-0,518530	0,072850
BTH	0,300605	0,498828	0,128685	0,038839	-0,025590	1	-0,044320	0,247437	0,485010	0,484867
NEFT	0,425197	0,186505	-0,064110	-0,179150	0,048212	-0,044320	1	0,008429	0,055793	-0,078250
ZLP	-0,075040	0,500718	0,405426	0,049939	-0,121620	0,247437	0,008429	1	0,348910	-0,031840
ALB	-0,063850	-0,050730	0,550444	0,336568	-0,518530	0,485010	0,055793	0,348910	1	0,639847
PET	-0,047250	-0,026710	0,623532	0,684994	0,072850	0,484867	-0,078250	-0,031840	0,639847	1

Таблица 6

Отношения между стандартните отклонения на възвръщаемостите на акциите

Стандартни отклонения	σ_{LEV}	σ_{SFARM}	σ_{ALBH}	σ_{DOVUHL}	σ_{GAMZA}	Σ_{BTH}	σ_{NEFT}	σ_{ZLP}	Σ_{ALB}	σ_{PET}
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_{LEV}	1	0,101632	0,417058	0,224150	0,324631	0,241678	0,164365	0,165197	0,223812	0,153763
σ_{SFARM}	9,839402	1	4,103604	2,205502	3,194171	2,377970	1,617252	1,625444	2,202176	1,512939
σ_{ALBH}	2,397747	0,243688	1	0,537455	0,778382	0,579483	0,394105	0,396102	0,536644	0,368685
σ_{DOVUHL}	4,461298	0,453412	1,860621	1	1,448274	1,078199	0,733281	0,736995	0,998492	0,685984
σ_{GAMZA}	3,080424	0,313070	1,284716	0,690477	1	0,744472	0,506314	0,508878	0,689436	0,473656
σ_{BTH}	4,137731	0,420527	1,725675	0,927472	1,343234	1	0,680098	0,683543	0,926074	0,636231
σ_{NEFT}	6,084024	0,618333	2,537392	1,363734	1,975061	1,470377	1	1,005065	1,361677	0,935500
σ_{ZLP}	6,053363	0,615217	2,524605	1,356861	1,965107	1,462967	0,994960	1	1,354815	0,930785
σ_{ALB}	4,468036	0,454096	1,863431	1,001510	1,450462	1,079828	0,734388	0,738108	1	0,687020
σ_{PET}	6,503502	0,660965	2,712339	1,457760	2,111236	1,571756	1,068948	1,074362	1,455562	1

Таблица 7

Отношения между коефициентите на вариация на акциите

Коефициенти на вариация	V_{LEV}	V_{SFARM}	V_{ALBH}	V_{DOVUHL}	V_{GAMZA}	V_{BTH}	V_{NEFT}	V_{ZLP}	V_{ALB}	V_{PET}
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_{LEV}	1	33,424290	2,060335	16,097000	-14,195100	27,263880	14,289140	21,081990	24,806880	18,635610
V_{SFARM}	0,029918	1	0,061642	0,481596	-0,424690	0,815691	0,427508	0,630739	0,742181	0,557547
V_{ALBH}	0,485358	16,222740	1	7,812806	-6,889700	13,232740	6,935348	10,232310	12,040220	9,044940
V_{DOVUHL}	0,062123	2,076430	0,127995	1	-0,881850	1,693724	0,887690	1,309685	1,541087	1,157707
V_{GAMZA}	-0,070450	-2,354640	-0,145140	-1,133980	1	-1,920650	-1,006630	-1,485160	-1,747570	-1,312820
V_{BTH}	0,036679	1,225955	0,075570	0,590415	-0,520660	1	0,524105	0,773257	0,909881	0,683527
V_{NEFT}	0,069983	2,339139	0,144189	1,126520	-0,993420	1,908014	1	1,475386	1,736065	1,304180
V_{ZLP}	0,047434	1,585443	0,097730	0,763543	-0,673330	1,293231	0,677789	1	1,176686	0,883959
V_{ALB}	0,040311	1,347380	0,083055	0,648892	-0,572220	1,099045	0,576015	0,849845	1	0,751227
V_{PET}	0,053661	1,793571	0,110559	0,863776	-0,761720	1,462999	0,766765	1,131275	1,331155	1

Таблица 8

Тестване на условието $\rho_{ij} < \min\left\{\frac{\sigma_i}{\sigma_j};\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right\}$

Фирми	*LEV*	*SFARM*	*ALBH*	*DOVUHL*	*GAMZA*	*BTH*	*NEFT*	*ZLP*	*ALB*	*PET*
LEV	Не	Не	Да	Да	Да	Не	Не	Да	Да	Да
SFARM	Не	Не	Да	Да	Да	Не	Да	Да	Да	Да
ALBH	Да	Да	Не	Не	Да	Да	Да	Не	Не	Не
DOVUHL	Да	Да	Не	Не	Да	Да	Да	Да	Да	Да
GAMZA	Да	Да	Да	Да	Не	Да	Да	Да	Да	Да
BTH	Не	Не	Да	Да	Да	Не	Да	Да	Да	Да
NEFT	Не	Да	Да	Да	Да	Да	Не	Да	Да	Да
ZLP	Да	Да	Не	Да	Да	Да	Да	Не	Да	Да
ALB	Да	Да	Не	Да	Да	Да	Да	Да	Не	Да
PET	Да	Да	Не	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Не

Сравняваме данните от табл. 5 и 6, за да отговорим на въпроса между кои компании може и между кои не може да се създаде σ-портфейл?

След като е проверено условието

$$\rho_{ij} < \min\left\{\frac{\sigma_i}{\sigma_j},\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right\},\ i,j=\overline{1,10},$$

резултатите са изведени в табл. 8.

"Да" означава, че между тези компании съществува σ-двуактивен портфейл, а "Не", че не съществува.

Ако използваме условната номерация на компаниите вместо техните наименования или кодове с цел по-компактно записване на резултатите, можем да направим следните изводи:

1. σ-портфейли съществуват между: (1,3); (1,4); (1,8); (1,9); (1,10); (2,3); (2,4); (2,7); (2,8); (2,9); (2,10); (3,6); (3,7); (4,6); (4,7); (4,8); (4,9); (4,10); (6,7); (6,8); (6,9); (6,10), (7,8); (7,9); (7,10); (8,9); (8,10); (9,10).

2. σ-портфейли не съществуват между: (1,2); (1,6); (1,7); (2,6); (3,4); (3,8); (3,9); (3,10).

Таблица 9

Тестване на условието $\rho_{ij} < \min\left\{\frac{V_i}{V_j};\frac{V_j}{V_i}\right\}$ между акциите

Фирми	*LEV*	*SFARM*	*ALBH*	*DOVUHL*	*GAMZA*	*BTH*	*NEFT*	*ZLP*	*ALB*	*PET*
LEV	Не	Не	Да	Да	Не	Не	Не	Да	Да	Да
SFARM	Не	Не	Не	Да	Не	Да	Да	Да	Да	Да
ALBH	Да	Не	Не	Не	Не	Не	Да	Не	Не	Не
DOVUHL	Да	Да	Не	Не	Не	Да	Да	Да	Да	Да
GAMZA	Не	Не	Не	Не	Не	Не	Не	Не	Не	Не
BTH	Не	Да	Не	Да	Не	Не	Да	Да	Да	Да
NEFT	Не	Да	Да	Да	Не	Да	Не	Да	Да	Да
ZLP	Да	Да	Не	Да	Не	Да	Да	Не	Да	Да
ALB	Да	Да	Не	Да	Не	Да	Да	Да	Не	Да
PET	Да	Да	Не	Да	Не	Да	Да	Да	Да	Не

Резултатите от точка 2 показват, че е безсмислено да се търси пропорция за инвестиране на капиталите в които и да е от изброените двойки с цел постигане намаление на портфейлния риск. Каквато и минимизационна задача да бъде решена, отговорът ще бъде, че минималният портфейлен риск е по-малкият от рисковете на двата актива.

За да отговорим на въпроса между кои двойки активи може да се създаде V-портфейл, сравняваме данните от табл. 5 и табл. 7, като проверяваме условието:

$$\rho_{ij} < \min\left\{\frac{\sigma_i}{\sigma_j},\frac{\sigma_j}{\sigma_i}\right\},\ i,j=\overline{1,10},$$

Резултатите са изведени в табл. 8, като при “Да” съществуват V-портфейли, при “Не” няма такива.

1. От табл. 9 виждаме, че V-портфейли не съществуват между: (1,2); (1,6); (1,7); (2,3); (3,4); (3,6); (3,8); (3,9); (3,10).

2. За всеки от останалите варианти са възможни V-портфейли.

Беше казано, че изключваме акциите на GAMZA, тъй като има отрицателна средна възвръщаемост. Трябва да отбележим, че понякога, ако рискът на акциите на такава компания е значително по-малък в сравнение с този на друга компания, то включването й в портфейла може да доведе до намаляване на портфейлния риск или на портфейлния коефициент на вариация. Това обаче ще бъде за сметка на значително намаляване на портфейлната средна възвръщаемост.

Ще направим известен анализ на двуактивните портфейли, за които или не съществува σ-портфейл, или не съществува V-портфейл (табл. 10).

Таблица 10

Двуактивни портфейли, за които или не съществува σ-портфейл, или не съществува V-портфейл

	Портфейли									
	(1,2)	(1,6)	(1,7)	(2,3)	(2,6)	(3,4)	(3,6)	(3,8)	(3,9)	(3,10)
V-портфейл	Не	Не	Не	Не	Да	Не	Не	Не	Не	Не
σ-портфейл	Не	Не	Не	Да	Не	Не	Да	Не	Не	Не
Съотношения между ρ_{ij}, MV_0 и $M\sigma_0$	$\rho_{12} > M\sigma_0 > MV_0$	$\rho_{16} > M\sigma_0 > MV_0$	$\rho_{17} > M\sigma_0 > MV_0$	$M\sigma_0 > \rho_{23} > MV_0$	$MV_0 > \rho_{26} > M\sigma_0$	$\rho_{34} > M\sigma_0 > MV_0$	$M\sigma_0 > \rho_{36} > MV_0$	$\rho_{38} > M\sigma_0 > MV_0$	$\rho_{39} > M\sigma_0 > MV_0$	$\rho_{3\,10} > M\sigma_0 > MV_0$

Колонките, в които има "Не" и в първия, и във втория ред показват, че между съответните активи не трябва да се формира двуактивен портфейл. Това сочат и неравенствата в третия ред между ρ_{ij}, MV_0 и $M\sigma_0$.

Между активите 2 и 3 и 3 и 6 съществува σ-портфейл, но не съществува V-портфейл. За тях е изпълнено условие (8), но не е изпълнено условие (14), което е в потвърждение на казаното. Между активи 2 и 6 съществува V- портфейл, но не съществува σ-портфейл. За тях е изпълнено условие (14), но не е изпълнено условие (8). За тези две акции, като използваме данните от табл. 4, виждаме, че:

$$\bar{r}_2 > \bar{r}_6,$$

$$\sigma_2 > \sigma_6,$$

$$\frac{\sigma_6^2}{\bar{r}_6} < \frac{\sigma_2^2}{\bar{r}_2},$$

т.е. в сила са условия (19) на твърдение 3.

В същото време $\rho_{26} \in (M\sigma_0, MV_0)$, което е в потвърждение на обобщение (2) след твърдение 3.

Направеният анализ за създаване на портфейли между които и да е две компании на БФБ дава възможност да се изолират двойките компании, за които не съществуват σ- и V-портфейли. За двойките компании като (2,3); (2,6) и (3,6) съществуват портфейли само от единия тип. В зависимост от критерия, който си поставя инвеститорът, а именно дали цели σ-оптимален или V-оптимален двуактивен портфейл, може да отхвърли или избере да инвестира в тези два актива.

За останалите двойки активи, при които е възможно да бъде съставен както σ-портфейл, така и V-портфейл, съществува както σ-оптимален, така и V-оптимален портфейл. Чрез програма за минимизация може да бъде намерен такъв отново според критерия на инвеститора.

В разработката е направен опит да се изведат оценки за коефициента на корелация, които служат като достатъчно условие за съществуване на σ- и V-портфейли.

От доказаните твърдения, примерите и резултатите от изследването на акции, котирани на БФБ, става ясно, че формирането на такива невинаги е възможно.

С помощта на твърдения 2 и 3 и обобщенията след тях направихме опит за класификация на съществуването и несъществуването на σ- и респ. на V-портфейли.

Получените теоретични резултати са тествани с реални данни за едни от най-котираните ценни книжа на фондовия пазар в България.

Като предмет на по-нататъшен задълбочен анализ и търсения в тази област можем да формулираме следните направления:

1. Извеждане на теоретични резултати за съществуване и несъществуване на σ- и V-оптималности в мултиактивен портфейл. В това направление авторът е постигнал известни резултати.

2. При анализа в тази разработка имаме предвид като критерии риска и коефициента на вариация между активите. Нужно е това да бъде обвързано и с мястото на всеки актив на самия пазар, което предполага в анализа да се отчитат и β-коефициентите на отделните активи.

3. Да бъде създаден програмен продукт, с помощта на който лесно да се обобщават резултатите след проверка на условията (8) и (14).

Получените в разработката теоретични резултати, подкрепени с реални изследвания, могат значително да съкратят както труд, така и време при търсене на съществуването на оптимални портфейли.

Използвана литература

Боди, З. и др, Инвестиции., С., Натурела, 2000.

Бошнаков, В. Статистическа методология за анализ на връзката риск – възвръщаемост. - Статистика, 1998, N 5, с. 15 – 25.

Галиц, Л. Финансов инженеринг. Бургас, Делфин прес, 1994.

Дочев, Д. Теория на риска. ИУ, Варна, 2001.

Драганов, Хр. и др. Управление на риска във фирмата. Свищов, 1993.

Йорданов, Й. Финансови инвестиции. Варна, 2001.

Лукашин, Ю. П. Оптимизация структуры портфейля ценных бумаг. – В: Экономика и математические методы, Т. 31. 1994, с. 138 – 150.

Николаев, Р. Определяне коефициента на корелация в двуактивен портфейл за постигане на ефекта на диверсификация. - Известия на СУ - Варна, 2000, N 2; 2001, N 1, с. 37 – 39.

Шарп, У. и др. Инвестиции. Москва, Инфра – М, 1999.

Evans, J. L. and St. H. Archer. Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. - Journal of Finance, XII, 1968.

Markowitz, H. M. Portfolio Selection. - Journal of Finance, III, 1952.

Markowitz, H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. New York, John Wiley & Sons, 1959.

Wagner, W. H. and S. C. Lan. The Effect of Diversification on Risk. - Financial Analysis Journal, XI – XII, 1971.

14.IV.2003 г.