Акад. проф. д-р т.н. Иван Попчев, н.с. Ирина Радева

УПРАВЛЕНИЕ НА ОБЛИГАЦИОННИ ПОРТФЕЙЛИ: АНАЛИЗ И ПРИЛОЖЕНИЕ НА МОДЕЛА ЗА МНОГОПЕРИОДНА ИМУНИЗАЦИЯ

Разгледани са теоретичният анализ и практическото приложение на модела на полудетерминистична многопериодна имунизация, използван при управлението на активи и пасиви. Акцентирано е върху основните теореми, залегнали в теорията на тази имунизация, формулирането на произтичащата оптимизационна задача и нейното линеаризиране, технологичната последователност при използването й и необходимата предварителна обработка на данните за въвеждането им в линейната оптимизационна функция. Приложението на модела е илюстрирано с пример и получените резултати са коментирани във връзка с тяхната приложимост.

JEL: C61;E43; G11; G23

Оптимизационните задачи за структуриране на портфейли от държавни ценни книжа (ДЦК), формулирани в контекста на имунизацията като стратегия за управление на активи и пасиви, са особено интересни за развиващите се пазари, какъвто е българският, и все още нямат задоволително теоретично решение и практическо приложение. Използването на облигациите за имунизация в България засега не буди особен интерес, защото, от една страна, този сегмент от финансовия пазар тепърва разширява своето присъствие, а от друга, инвестирането в дългови инструменти (в частност ДЦК) се приема по-скоро като изпълнение на законови разпоредби, а не като част от обща или специфична инвестиционна стратегия. Въпреки това различните инвестиционни, застрахователни и пенсионноосигурителни дружества вече от няколко години заеха пазарните си позиции във финансовия сектор, което прави проблемите по управлението на портфейли актуални както от професионална, така и от научна гледна точка. Имунизацията като стратегия, използвана при управлението на портфейли от облигации с фиксиран доход, засяга основно застрахователните и пенсионно-осигурителните дружества, защото те, от една страна, формират и управляват портфейли, а от друга, постоянно разпределят изходящи парични потоци. Несигурността в промените на лихвените проценти повдига въпроса за подходящ избор на структурата на тези портфейли във връзка със запазването на тяхната стойност при неблагоприятни промени в кривата на доходност[1].

[1] Principles for the Management of Interest Rate Risk. Basel, Basel Committee on Banking Supervision, September 1997; *Ramaswamy, S.* Global Asset Allocation in Fixed Income Markets. Basel, Bank for International Settlements. Working Paper, September 1997.

Имунизацията на портфейли от облигации и нейната реализация чрез линейна оптимизация са разглеждани в редица публикации. П. Самюелсън, Ф. Редингтън, Л. Фишър и Р. Уейл дават нейното класическо решение чрез формулиране на имунизационната теория, базирана на дефиницията на Макоули за дюрация. Ф. Редингтън и П. Самюелсън[2] независимо един от друг показват, че ако активите и пасивите имат равни дюрации на Макоули, то портфейлът е защитен срещу малки паралелни измествания в кривата на доходност. Л. Фишър и Р. Уейл[3] смятат, че е възможно пълно имунизиране на портфейл с единичен пасив срещу произволни адитивни паралелни промени в спот-лихвените проценти чрез съгласуване на дюрациите. Те предполагат, че въпросът се състои в това да се избере такава структура на портфейла, която да не позволява неговата доходност да пада под определен спот-лихвен процент за даден инвестиционен хоризонт и следователно изоставят допускането за плоска срочна структура. Това води до необходимостта от въвеждане на допълнително допускане за това какъв лихвен процент да се използва при реинвестирането на входящите за портфейла парични потоци за инвестиционния хоризонт, какъв процент да се използва за реинвестиране на изходящите от портфейла парични потоци и какъв да се използва за дисконтиране на нереализираните в края на инвестиционния хоризонт парични потоци.

Неудобствата на допускането за паралелно изместване на крива на доходност води до разработване на имунизационни стратегии за непаралените измествания и свързания в тях риск. Р. Рейтано развива локална имунизационна стратегия при непаралелни измествания на кривата на доходност и открива, че класическата имунизационна стратегия може да скрие рискове, свързани с тези измествания. Г. Бийрваг, Г. Кауфман и А. Товс, Кан и Купър разработват глобални имунизационни стратегии за определени непаралелни измествания. Д. Ву, Л. Шумахер и Дж. Хикман обобщават имунизационния модел на Рединктън[4] за случая на единичен пасив и коментират ограниченията в неговото приложение.[5]

Г. Фонг и О. Васичек[6] изследват ефекта на произволните промени на лихвените проценти върху портфейл, имунизиран срещу паралелни измествания. Те отриват, че класически имунизираният портфейл има отрицателна долна

---

[2] *Samuelson, P.* The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System. – American Economic Review, 1945, Vol. 55, N 1, p. 16-27.

[3] *Fisher, L., R. Weil*. Coping with the Risk of Interest Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategies. – Journal of Business, 1971, Vol. 52, N 1, p. 51-61.

[4] *Redington, F.* Review of the Principles of Life-office Valuations. – Journal of the Institute of Actuaries, 1952, Vol. 78, N 3, p. 286-340.

[5] *Wu, D., L. Shumacher, J. Hicman*. Immunization Theory: A Simplified Example. Actuarial Research Clearing House, 1983, Vol. 1.

[6] *Fong, H. G., O. A. Vasicek*. A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization. - Journal of Finance, December 1984, Vol. XXXIX, N 5.

граница, която зависи от значението (magnitude) на изменението (в срочната структура) и от структурата на портфейла. Те въвеждат в теорията мярка за имунизационен риск на портфейлите при паралелни измествания и я наричат М *квадрат*. Предложената стратегия се състои в избор на портфейл с минимална стойност на М *квадрат* при ограничителните условия на класическата имунизация. При техния подход се избира портфейл, защитен срещу паралелни измествания с най-голяма долна граница. Стойността на М *квадрат* показва възможната загуба в стойността на портфейла, предизвикана от произволни измествания в кривата на доходност.

С. Елас и У. Шию[7] обобщават класическата имунизационна теория на Редингтън за случая на произволни шокови промени на лихвените проценти. Р. Кошерлакота, Е. Розенблум и У. Шию[8] показват обобщението и решаването на близката до имунизация стратегия на съгласуване на паричните потоци чрез линейна оптимизация за случая на множество парични потоци на пасивите (многопериодна имунизация).

Р. Рейтано[9] анализира пример за имунизация при позиции на излишък и показва, че класическите имунизационни теории могат да скрият рисковете, свързани с непаралелните измествания в кривата на доходност, и да увеличат вероятността от провал на имунизацията.

М. де Фелис[10] се концентрира върху основната роля на теорията за оценка на облигациите и моделите за срочна структура на лихвените проценти, като обобщава основните резултати и теореми в имунизационната теория. Той представя модели за управление на активи и пасиви в рамките на полудетерминистичния подход към имунизацията на портфейли и обсъжда стохастичната имунизационна теория и стохастичния подход при тяхното управление.

Р. Барбър и М. Купър[11] разширяват разработките на Рейтано, като показват условията, при които съгласуването на дюрациите води до пълно имунизиране на портфейл. Те показват, че теоремите за пълна имунизация са специфичен случай на техните предложения и разширяват множеството на моделите за срочната структура, при които е възможна пълна имунизация.

---

[7] *Ellas, S., W. Shiu*. A Generalization of Redington's Theory of Immunization. Actuarial Research Clearing House, 1986, Vol. 2.

[8] *Kocherlakota, R., E. S. Rosenbloom, S. Elias, W. Shiu*. Cash-Flow Matching and Linear Programming Duality. Transactions of Society of Actuaries, 1990, Vol. 42.

[9] *Reitano, R*. Non-Parallel Yield Curve Shifts and Immunization. - The Journal of Portfolio Management, Spring 1992.

[10] *De Felice, M*. Immunization Theory: An Actuarial Perspective on Asset-Liability Management. University of Rome "La Sapienza"; Financial Risk in Insurance. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[11] *Barber, R. J., M. L. Copper.* Bond Immunization for Additive Interest Rate Shocks. - Journal of Economics and Finance, 1998, Vol. 22.

Тук е разгледан полудетерминистичният модел за многопериодна имунизация, неговата линеаризация и е предложена реализацията му чрез линейно оптимизиране. Целта е получаване на имунизиран портфейл, съставен от облигации с фиксиран доход, при следната формулировка на задачата:

При дадено множество инструменти с фиксиран доход и известни, фиксирани по стойност и погасителен план бъдещи пасиви:

● *да се определи такава структура на портфейла от облигации, че стойността му да не е чувствителна към адитивни измествания в срочната структура;*

● *да се определи такава структура на портфейла от облигации, че стойността му да е минимално зависима от произволни измествания в срочната структура;*

● *общият паричен поток, генериран от портфейла от облигации, напълно да финансира фиксираните бъдещи парични потоци на пасивите.*

Теоретичната крива на безрисковите лихвени проценти и дисконтовите фактори, съответстващи на срочната структура в момента на решението, се получават чрез процедура на (bootstrapping) буутстрап. За решаването на така формулираната задача е написан специален софтуерен модул.

Във връзка с поставената цел, линеаризацията и формулирането на оптимизационната задача са представени основните теореми на полудетерминистичната имунизационна теория, извеждането на оптимизационната функция и ограничителните условия, въвеждането на неизвестните, определящи търсената структура на портфейла от облигации. Обяснени са обработката и организацията на входните масиви от данни, както и формирането на входната за оптимизационната задача матрица.

Формулиране на задачата

Представените теореми на полудетерминистичната имунизационна теория следват М. де Фелис.[12] Според този метод лихвено чувствителните портфейли се оценяват чрез техните входящи и изходящи парични потоци, които се разглеждат като несигурни, защото текущата им стойност е функция на лихвените проценти.

Нека означим паричните потоци на облигациите и пасивите съответно с векторите a и b, текущата им стойност в момента на оценката t_0 съответно с $P(t_0,a)$ и $P(t_0,b)$ и тяхната разлика със $z = a - b$. Условието за платежоспособност изисква разликата между текущата стойност на паричните потоци, изразена с $P(t_0;a) - P(t_0;b) = P(t_0;z)$, да е неотрицателна. Стойността на $P(t^+,z)$ в момента $t^+ > t_0$ ($t^+ = t_0 + dt$) е неизвестна в момента t_0.

[12] Вж. *Fong, H. G., O. A. Vasicek.* Цит. съч.

Основната цел на имунизационната стратегия е да ограничи намаляването на стойността $P(t^{+},z)$ и да гарантира платежоспособността на портфейла.

Полудетерминистичната имунизация е приложима към портфейли, формирани от инструменти с известни към момента t_0 парични потоци. Като такива инструменти се разглеждат облигациите с фиксиран доход.

Всяка облигация, дефинирана чрез вектора *a*, има неотрицателен паричен поток със следните компоненти $a_1,\ldots,a_k,\ldots, a_m$ и съответни падежи $t_1,\ldots,t_k,\ldots, t_m$ (където $t_1 \le \ldots \le t_k \le \ldots \le t_m$).

За вектора *a* се дефинира следното:

$$P(t_0;a)=\sum_{k=1}^{m} a_k v(t_0,t_k), \tag{1}$$

$$P(t_0;a)=\sum_{k=1}^{m} a_k v(t_0,t_k), \tag{2}$$

$$MAD_j(t_0;a)=\sum_{k=1}^{m} \left|t_j - t_k\right| p_k, \tag{3}$$

$$M^2(t_0;a)=\sum_{k=1}^{m} \left[t_k - D(0;a)\right]^2 p_k, \tag{4}$$

където:

$$p_k=\frac{a_k v(t_0,t_k)}{\sum_{k=1}^{m} a_k v(t_0,t_k)} \tag{5}$$

където:

a_k е паричният поток, платим в момента t_k;

$v(t_0,t_k)$ - дисконтовият фактор на паричния поток a_k за интервала от време (t_0,t_k);

$P(t_0;a)$ - цената на облигацията, дефинирана като линейна функция на дисконтовия фактор в момента t_0;

$D(t_0;a)$ - дюрацията на Макоули на облигацията;

$MAD_j(t;a)$ - средното абсолютно отклонение на времевото разпределение на паричните потоци по отношение на дадена дата за плащане t_j;

$M^2(t_0;a)$ - времевото разпределение на паричните потоци на облигацията (вторият централен момент на времевото разпределение).

Всеки пасив, дефиниран чрез вектора *b*, има неотрицателен паричен поток с компоненти $b_1,b_2,\ldots,b_m$ и падежи съответно $t_1,t_2,\ldots,t_m$ ($t_1 \le t_2 \ldots \le t_m$). Аналогично, за вектора *b* стойностите на $P(t_0;b)$, $D(t_0;b)$, $MAD_j(t_0;b)$ и $M^2(t_0;b)$ се дефинират, както следва:

(6) $$P\left(t_0;b\right)=\sum_{k=1}^{m}b_k v\left(t_0,t_k\right),$$

(7) $$D\left(t_0;b\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(t_k-t_0\right)c_k$$

(8) $$MAD_j\left(t_0;b\right)=\sum_{k=1}^{m}\left|t_j-t_k\right|c_k,$$

(9) $$M^2\left(t_0;b\right)=\sum_{k=1}^{m}\left[t_k-D\left(0;b\right)\right]^2 c_k,$$

където:

(10) $$c_k=\frac{b_k v\left(t_0,t_k\right)}{\sum_{k=1}^{m}b_k v\left(t_0,t_k\right)}$$

Нетният времеви спред на разликата се дефинира като[13]

$$M^2(t_0)=M^2(t_0;a)-M^2(t_0;b).$$

За полудетерминистичната имунизация са формулирани следните теореми.

Т1.[14] Нека срочната структура в момента t_0 се дефинира с функцията $\delta(t_0,s)$, $\forall s\geq t_0$, потокът на пасивите - с $b=\{b_1,\ldots,b_m\}$ и потокът на активите - с $a=\{a_1,\ldots,a_m\}$.

Ако

(11) $$P\left(t_0;a\right)=P\left(t_0;b\right)$$

при допускането, че:

$$\delta(t^+,s)=\delta(t_0,s)+Y,s\leq t^+,$$

неравенството

(12) $$P\left(t^+;a\right)\geq P\left(t^+;b\right)$$

ще бъде изпълнено тогава и само тогава, когато

(13) $$\begin{gathered}D\left(t_0;a\right)=D\left(t_0;b\right),\\ MAD_j\left(t_0;a\right)\geq MAD_j\left(t_0;b\right),\ j=1,2,\ldots,m.\end{gathered}$$

Допускането за изместването в срочната структура, формулирано в $\delta(t^+,s)=\delta(t_0,s)+Y,s\leq t^+$, представлява "изпъкнало изместване", базирано

---

[13] Вж. *Fong, H. G., O. A. Vasicek.* Цит. съч.

[14] Пак там.

на т. нар. хипотеза за адитивните измествания. Тук резултатната крива на доходност $\delta(t^+, s)$ за периода $[t_0,s]$ в момента t^+, следващ незабавно след t_0, не променя формата на кривата при настъпване на константния шок Y.

В случая на произволни измествания в срочната структура, когато $Y(s)$ е функция на времето s, и представлява изместването получено в момента t^+, се формулира следната теорема:

T2.[15] Нека дефинираме срочната структура в момента t_0 като функция $\delta(t_0,s),\ \forall s \ge t_0$, паричния поток на пасивите като $b=\{b_1,\dots, b_m\}$ и паричния поток на активите като $a=\{a_1,\dots, a_m\}$.

Ако:

(14) $$P(t_0;a)=P(t_0;b)$$

При условие, че

(15) $$\delta(t^+,s)=\delta(t_0,s)+Y(s), \mathrm{s}\le t^+,$$

където $Y(s)$ е функция с ограничена отгоре производна и ако са изпълнени следните условия:

(16) $$D(t_0;a)=D(t_0;b),$$

(17) $$MAD_j(t_0;a)\ge MAD_j(t_0;b),\ j=1,2,\dots,m,$$

тогава

(18) $$P(t^+;z)\ge P(t^+;b)QM^2(t_0),$$

където Q е реално оценима случайна променлива, независима от a и b, характеризирана само от формата на изместването.

Според **T2** равенството на текущите стойности на активите и пасивите, на тяхната дюрация и по-голямото времево разпределение на паричните потоци на облигациите относно времето t гарантират долната граница на текущата стойност на $P(t^+;z)$. Тази долна граница е произведението $P(t_0,b)QM^2(t_0)$, където Q е случайна променлива. $P(t^+;z)$ също е случайна променлива, която може за бъде отрицателна, нула или положителна. От (18) следва, че колкото по-близо до нулата е стойността на $M^2(t_0)$, толкова по ограничено е въздействието върху стойността на $P(t^+;z)$ на неблагоприятните измествания на срочната структура.

$M^2(t_0)$ е винаги неотрицателна с минимална стойност нула. При $M^2(t_0)=M^2_{min}=0$ имаме напълно имунизиран портфейл от облигации, защото изместванията на кривата на доходност не могат да въздейства върху стойността му в края на инвестиционния хоризонт. Всяка друга стойност на $M^2(t_0)$ показва, че портфейлът е повлиян от негативното въздействие на изместването на кривата на доходност.[16] Стойността на $M^2(t_0)$ се определя от структурата на портфейла и не зависи от бъдещите пазарни условия. $M^2(t_0)$ е

[15] Вж. *Fong, H. G., O. A. Vasicek.* Цит. съч.

[16] Вж. *Samuelson, P.* Цит. съч.

линейна по отношение на структурата на портфейла и следователно за минимизирането й могат да се използват методите на линейно програмиране[17].

Оптимизационен модел

Описваме:

● облигациите в момента t_0 с неотрицателната матрица $A_{l \times q}$ с общ член a_{ij}, представляващ входящия паричен поток, генериран от облигацията i в момента t_j, при $t_0 < t_j$;

● аналогично, пасивите в момента t_0 с неотрицателната матрица $B_{k \times p}$ с общ член b_{mn}, представляващ изходящия паричен поток на пасива m в момента t_n, където $t_0 < t_n$.

С векторите $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ и $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ описваме броя съответно на облигациите в A и на пасивите в B.

Щом паричните потоци на облигациите и пасивите са известни, портфейлът има:

● парични потоци от облигациите a с компоненти, зависещи от времето на получаване t_j:

$$a_j = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_{ij}, i = 1,2,\ldots,l;$$

● парични потоци от пасивите b, зависещи от времето на плащане t_n:

$$b_n = \sum_{n=1}^{p} \beta_m b_{mn}, n = 1,2,\ldots p$$

Пазарните стойности на облигациите и пасивите са равни съответно на C_a и C_b.

Използваме равенствата (4), (9) и (18) от Т2 за формулиране на целевата функция:

$$\min\left\{\sum_{\kappa=1}^{p}[t_k - D(0;a)]^2 p_k - \sum_{\kappa=1}^{p}[t_k - D(0;b)]^2 c_k\right\} =$$

$$= \min\left\{\sum_{\kappa=1}^{p}\left[t_k{}^2 p_k - 2t_k D(0;a) p_k + D(0;a)^2 p_k\right] - \sum_{\kappa=1}^{p}\left[t_k{}^2 c_k - 2t_k D(0;b) c_k + D(0;b)^2 c_k\right]\right\} =$$

$$= \min\left\{\sum_{\kappa=1}^{p} t_k{}^2 p_k - 2D(0;a)\sum_{k=1}^{p} t_k p_k + D(0;a)^2 \sum_{k=1}^{p} p_k - \sum_{\kappa=1}^{p} t_k{}^2 c_k + 2D(0;b)\sum_{k=1}^{p} t_k c_k - D(0;b)^2 \sum_{k=1}^{p} c_k\right\}$$

p_k се измества с (5) и c_k с (10):

---

[17] Вж. *Fong, H. G., O. A. Vasicek.* Цит. съч.

$$\min\left\{\begin{array}{l}\sum_{\kappa=1}^{p} t_k{}^2 a_k v(t_0,t_k) - 2D(0;a)\sum_{k=1}^{p} t_k a_k v(t_0,t_k) + D(0;a)^2 \sum_{k=1}^{p} a_k v(t_0,t_k) \\ -\sum_{\kappa=1}^{p} t_k{}^2 b_k v(t_0,t_k) + 2D(0;b)\sum_{k=1}^{p} t_k b_k v(t_0,t_k) - D(0;b)^2 \sum_{k=1}^{p} b_k v(t_0,t_k)\end{array}\right\}$$

Използваме (16) от **T2** за получаване на целевата функция:

(19) $$\min\left\{\sum_{\kappa=1}^{p} t_k{}^2 a_k v(t_0,t_k) - \sum_{\kappa=1}^{p} t_k{}^2 b_k v(t_0,t_k)\right\}$$

Според **T2** формулираме ограничителните условия чрез съответно заместване с (5) и (10).

(20) $$\sum_{\kappa=1}^{p} a_k v(t_0,t_k) = \sum_{\kappa=1}^{p} b_k v(t_0,t_k),$$

$$\sum_{k=1}^{p} (t_k - t_0) p_k = \sum_{k=1}^{p} (t_k - t_0) c_k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} (t_k - t_0) a_k v(t_0,t_k) = \sum_{k=1}^{p} (t_k - t_0) b_k v(t_0,t_k) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} t_k a_k v(t_0,t_k) - t_0 \sum_{k=1}^{p} a_k v(t_0,t_k) = \sum_{k=1}^{p} t_k b_k v(t_0,t_k) - t_0 \sum_{k=1}^{p} b_k v(t_0,t_k)$$

Използвайки (16) от **T2**, получаваме:

(21) $$\sum_{k=1}^{p} t_k a_k v(t_0,t_k) = \sum_{k=1}^{p} t_k b_k v(t_0,t_k)$$

(22) $$\sum_{k=1}^{p} |t_j - t_k| p_k \geq \sum_{k=1}^{p} |t_j - t_k| c_k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} |t_j - t_k| a_k v(t_0,t_k) \geq \sum_{k=1}^{p} |t_j - t_k| b_k v(t_0,t_k)$$

$$j = 1,2,\ldots,p$$

Следва въвеждане на неизвестните, които означаваме с α_i, *i = 1,2,…,l*, при $0 \leq \alpha_i \leq +\infty$. Те определят структурата на портфейла. Неизвестните α_i се въвеждат чрез a_k и b_k в (19), (20), (21) и (22):

$$a_k = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_{ik}$$

$$b_k = \sum_{j=1}^{p} \beta_j b_{jk} \Rightarrow \beta_j = 1 \Rightarrow b_k = \sum_{j=1}^{p} b_{jk}$$

С цел опростяване описанието на оптимизационния модел правим допълнително заместване в (19), (20), (21) и (22) чрез:

$$W_k = t_k a_{ik} v(t_0, t_k)$$

$$F_k = \frac{W_k}{a_{ik} v(t_0, t_k)}$$

$$Z_k = t_k b_{ik} v(t_0, t_k)$$

$$R_k = \frac{L_k}{t_k b_{ik} v(t_0, t_k)}$$

$$k = 1,2,..., p$$

Крайният вид на оптимизационния модел се дефинира като:

(23) $$\min\left\{ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \sum_{k=1}^{p} W_k F_k - \sum_{k=1}^{p} Z_k R_k \right\}$$

(24) $$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \sum_{k=1}^{p} \frac{W_k}{F_k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{Z_k}{R_k}$$

(25) $$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \sum_{k=1}^{p} W_k - \sum_{k=1}^{p} Z_k$$

(26) $$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \sum_{k=1}^{p} \left| F_j - F_k \right| \frac{W_k}{F_k} = \sum_{k=1}^{p} \left| R_j - R_k \right| \frac{Z_k}{R_k}$$

$$j = 1,2,..., p$$

(27) $$0 \le \alpha_i \le +\infty$$

Целевата функция (23) и ограничителните условия (равенствата (24), (35) и системата от неравенства (26) са линейни, което позволява решаването на задачата чрез линейно програмиране.

Приложение

Приложението на модела се осъществява от специално написан софтуерен модул, който впоследствие може да се вгради в съществуващ или нов софтуерен продукт за управление на облигационни портфейли. Модулът осъществява четири етапа. Първият е въвеждане на данните за облигациите и пасивите, процедурата на буутстрап (bootstrapping) за получаване на текущата сточна структура и пресмятане на паричните потоци. Вторият е обработка на масивите от данни и изчисляване на входните матрици за линейната оптимизационна функция. Третият етап е минимизиране на линейната функция на имунизационния риск, а четвъртият, изпълним в случай на успешно намиране на решение, е определяне структурата на портфейла от облигации и проверка на условието за платежоспособност.

Имунизационният модел се тества с пример, при който се постига пълна имунизация. Използвани са реални данни за облигации със сетълмент 22.11.2002.

Данни за облигациите и пасивите

В първия етап се използват основните данни за облигациите и пасивите. Общата стойност на последните е 200 хил. лв., разделени в 20 единични парични потоци от по 10 хил. лв., изплащани на всеки три месеца за периода от 22.02.2003 до 22.11. 2007 г. Данните за облигациите са представени в табл. 1. Датата на сетълмент на облигациите се приема за начален момент t_0. Чрез стандартна функция от основните данни за ДЦК се получават съответните доходности, парични потоци и датите на изплащане на купоните, които после се използват за получаване на входните за оптимизационната задача матрици.

Таблица 1

Данни за ДЦК с фиксиран доход

α_i	Номера	Дата на сетълмент (д/м/г)	Падеж (д/м/г)	Купон (%)	Цена купува	Цена продав а	Номина л	Доход-ност купува (%)	Доход-ност продава (%)
α1	3011102	22/11/02	25/09/03		95.473	95.958	100	5.56	4.94
α2	3011302	22/11/02	06/02/03		99.129	99.337	100	4.16	3.16
α3	2030401	22/11/02	11/07/03	6.00	100.829	101.206	100	4.65	4.5
α4	2030601	22/11/02	10/10/03	6.00	100.803	101.32	100	5.5	4.45
α5	2030302	22/11/02	31/0705	5.75	99.12	100.237	100	6.15	5.65
α6	2030402	22/11/02	11/11/05	6.00	99.608	100.885	100	6.15	5.65
α7	2030002	22/11/02	09/01/07	7.00	101.811	103.897	100	6.49	5.92
α8	2030202	22/11/02	10/07/07	6.50	99.793	101.383	100	6.55	6.15
α9	2040302	22/11/02	17/0709	7.00	99.516	101.363	100	7.9	6.74
α10	2040202	22/11/02	17/04/12	7.50	98.668	100.323	100	7.7	7.45

Дисконтирането на входящите парични потоци на облигациите и изходящите на пасивите е съществено при имунизацията. Това може да се направи по няколко начина.[18] В случая е прието изчисляването на дисконтовия фактор да се осъществи със стандартната процедура на буутстрап (bootstrapping),[19] като се изхожда от безрисковата крива на доходност към датата на сетълмент. Процедурата на буутстрап се осъществява от стандартна вградена функция. Стойностите за доходност на облигациите, изчислените съответно стойности на безрисковите лихви и дисконтови фактори, са показани на табл. 2.

Таблица 2

Матуритет (в години), доходност, безрискова доходност и дисконтов фактор

α_I	Матуритет	Доходност	Безрискова доходност	Дисконтов фактор
α1	0.21	0.05	0.04	0.97
α2	0.64	0.06	0.05	0.96
α3	0.85	0.04	0.03	0.99
α4	0.89	0.04	0.04	0.96
α5	2.73	0.06	0.06	0.86
α6	3.01	0.06	0.06	0.85
α7	4.19	0.06	0.06	0.78
α8	4.70	0.06	0.06	0.75
α9	6.75	0.07	0.07	0.64
α10	9.54	0.07	0.08	0.49

Вторият етап, включващ изчисляване на входните за оптимизацията матрици, е най-важната част за имунизационния модел. Матриците се състоят от дисконтираните входящи и изходящи парични потоци.

За да бъде коректно обаче, дисконтирането трябва да се разглежда в контекста на времевите интервали, които се определят от погасителния план на пасивите.[20] Оптимизационната процедура изисква използване на еднакви дисконтови фактори за входящите парични потоци на облигациите и изходящите парични потоци на пасивите. Към момента t_0, графикът на изплащане на купоните е известен. Той естествено зависи от датата на емисия и броя на изплащаните купони годишно. За по-добра нагледност времевото разпределение на паричните потоци на облигациите и на пасивите е представено графично на фиг. 1.

---

[18] *Bodie, Z., A. Kane, A. J. Marcus*. Essentials of Investments. Chicago, Irwin, 1995.

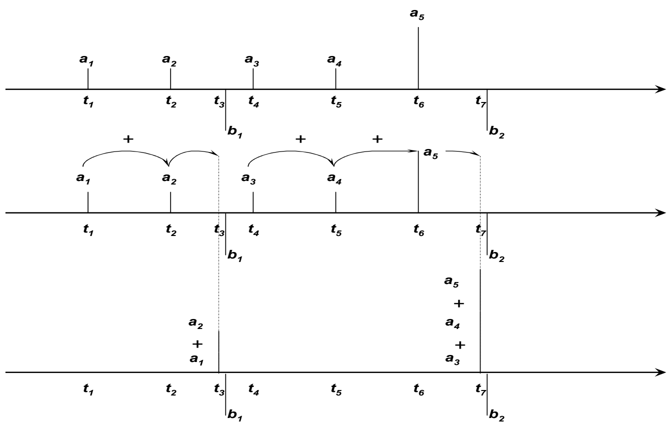
[19] *Fabozzi, F. J.* Bond Portfolio Management. FJF Associates New Hope, Pennsylvania, 2001.

[20] *Sharpe, W. F., J. Alexander, J. V. Bailey*, Investments. INFRA-M, 1999.

Фиг. 1. Разпределение на паричните потоци на активите и пасивите преди времевото изравняване

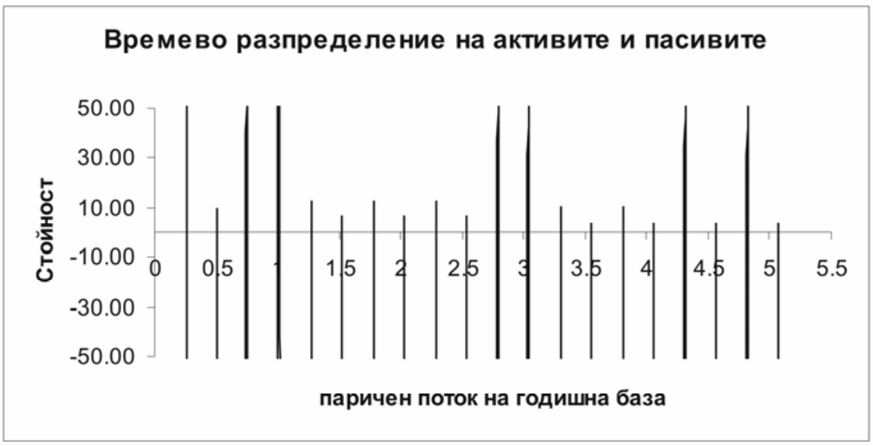
За прилагането на еднакво дисконтиране е необходимо изравняване на времевите интервали на паричните потоци на облигациите с тези на пасивите. Следователно паричните потоци на облигациите трябва да се групират така, че да съвпадат с погасителния план на пасивите (вж. фиг. 2). Процедурата на групиране на паричните потоци за една облигация се състои в следното: паричните потоци на облигацията, формирани от купоните и номинала, се представят от $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ и са платими на дати $\{t_1, t_2, t_4, t_5, t_6\}$. Паричните потоци на пасивите са представени от b_1 и b_2 и са платими на дати съответно t_3 и t_7. Времевата последователност на петте входящи от облигацията парични потока се прекъсва от изходящите два парични потока на пасивите. Така потокът a_1, получен на дата t_1, и потокът a_2 на дата t_2 предшестват плащането на пасива b_1 на дата t_3. Също паричните потоци a_3, a_4, a_5, получени на дати съответно t_4, t_5 и t_6, предшестват плащането на пасива b_2 на дата t_7. Следователно паричният поток от облигацията, който трябва да финансира изплащането на пасива b_1 към дата t_3, представлява сумата $a_1 + a_2$, а паричният поток, който трябва да финансира изплащането на пасива b_2 към дата t_7, представлява сумата $a_3 + a_4 + a_5$. Тази процедура се повтаря за всяка облигация по отношение на всеки пасив.

Така групирани, парични потоци формират входната матрица, необходима за въвеждане на коефициентите в линейната оптимизационна функция. В тази матрица броят на редовете е равен на броя на облигациите, а броят на колоните е равен на броя на пасивите. Всеки елемент от матрицата представлява обобщен паричен поток от една облигация. Този паричен поток има са цел да финансира плащането на пасив, който е платим непосредствено след или точно на датите на получаване на единичните парични потоци. Паричните потоци от облигациите, чиито дати на изплащане са след последния падеж на пасивите, се игнорират.



Фиг. 2. Схема на времевото изравняване на паричните потоци на облигациите

Тази процедура гарантира времевото изравняване на новосформираните парични потоци от облигациите и пасивите и позволява коректно дисконтиране с един и същи дисконтов фактор. Разпределението на паричните потоци след времевото изравняване е показано на фиг. 3.



Фиг. 3. Разпределение на паричните потоци на активите и пасивите след времевото изравняване

Резултати

Третият етап на модела представлява минимизирането на целевата функция при зададените ограничителни условия и като резултат от тази минимизация - намиране на търсената структура на портфейла от облигации. Другият резултат е стойността на имунизационния риск на портфейла М *квадрат*, т.е. минималната стойност на целевата функция. Тази стойност е много показателна. Дори при намиране на решение на оптимизационната задача, получаването на положителната стойност на М *квадрат* показва, че паричните потоци от облигацията не са в състояние да финансират изплащането на пасивите изцяло. Проверката на условието за платежоспособност се осъществява в четвъртия етап. При него се извършва съпоставка на генерираните входящи паричните потоци от новосформирания портфейл от облигации и паричните потоци на пасивите. При проверката на това условие обаче се използват действителните, а не трансформираните (по схемата в етап втори) парични потоци на облигациите.

За разглеждания пример резултатният портфейл се състои от три облигации: 2% от портфейла се падат на облигация α_1, 48% - на облигация α_2 и 50% са от α_3. При тази структура и при дадените стойности на пасивите и погасителния план стойността на имунизационния риск М *квадрат* е нула.

Проверката на условието за платежоспособност се прави чрез съпоставка на паричните потоци на избраните облигации и пасивите. Използваните парични потоци от облигациите са реалните, а не трансформираните. Реинвестирането на остатъчните парични потоци за целия инвестиционен хоризонт се прави при 3% годишен лихвен процент. Проверката за платежоспособност е представена на табл. 3.

Таблица 3

Проверка на условието за платежоспособност

Падежи	Паричен поток от активите	Паричен поток от пасивите	Остатък
22/02/03	10075.83	-10000.00	75.83
22/05/03	10149.17	-10000.00	149.17
22/08/03	10224.99	-10000.00	224.99
22/11/03	10300.82	-10000.00	300.82
22/02/04	10376.64	-10000.00	376.64
22/05/04	10450.82	-10000.00	450.82
22/08/04	10526.64	-10000.00	526.64
22/11/04	10602.47	-10000.00	602.47
22/02/05	10678.29	-10000.00	678.29
22/05/05	10751.63	-10000.00	751.63
22/04/05	10827.46	-10000.00	827.46
22/11/05	10903.28	-10000.00	903.28
22/02/06	10979.11	-10000.00	979.11
22/05/06	11052.45	-10000.00	1052.45
22/08/06	11128.28	-10000.00	1128.28
22/11/06	11204.10	-10000.00	1204.10
22/02/07	11279.93	-10000.00	1279.93
22/05/07	11353.27	-10000.00	1353.27
22/08/07	11429.10	-10000.00	1429.10
22/11/07	11504.92	-10000.00	1504.92

От табл. 3 следва, че при така намерената структура на портфейла от облигации условието за платежоспособност е изпълнено за целия инвестиционен хоризонт. Нарастването на лихвените проценти не се отразява негативно на изплащането на пасивите, което е и целта на направеното изследване на модела.

*

Целта на представения пример е да се покаже поетапно процедурата на линейна оптимизация при прилагането на модел за полудетерминистична многопериодна имунизация в реална ситуация. Моделът позволява формиране на портфейл от облигации, съставен от повече от две облигации. Примерът потвърждава, че при стойност на имунизационния риск *M квадрат,* равен на нула, е възможно пълното удовлетворяване на условието за платежоспособност за петгодишен инвестиционен хоризонт и постигане на пълна имунизация. В повечето изследвания в областта се изтъква, че не е препоръчително използването на по-дълъг инвестиционен хоризонт. Един от реалните варианти е три до пет години, след което се налага ребалансиране на портфейла. Разгледаният модел обаче не налага ежегодно ребалансиране.

При формиране на входните за оптимизацията данни е използван алгоритъм за предварително времево изравняване на паричните потоци на облигациите с тези на погасителния план на пасивите. Предложено е също границите на стойностите на търсените неизвестни, определящи структурата на портфейла от облигации, да се променят от $0 \leq \alpha \leq 1$ на $1 \leq \alpha \leq +\infty$. Разгледаният пример показва, че моделът е успешно приложим към реални данни.

Изводите от представения пример могат да се обобщят, както следва:

1. При зададени фиксирани стойности на пасивите и погасителен план, определящ общия инвестиционен хоризонт, може да се постигне минимална стойност на имунизационния риск М *квадрат,* равна на нула.

2. При имунизационен риск, равен на нула, условието за платежоспособност е напълно удовлетворено.

3. При така зададения погасителен план на пасивите стойността на единичните изходящи парични потоци не е от значение за постигане на нулев имунизационен риск. Това се отразява единствено върху сегашната стойност на портфейла от облигации, респ. размера на инвестицията.

4. Промяната на реинвестиционния лихвен процент не се отразява негативно върху платежоспособността на портфейла.

Последващ анализ на модела трябва да се проведе във връзка с влиянието на различни инвестиционни ограничения, каквито могат да са ограничена матуритетна структура на облигациите с фиксиран доход, различна стойност на отделните парични потоци на пасивите и разпределение на погасителните им планове. Анализ може да се направи и във връзка със положителните стойността на имунизационния риск и платежоспособността, дисперсията на времето за изплащане на пасивите и долната граница на интервалите за изплащането им.

6.I.2004 г.