Владимир Ценков

МОДЕЛИРАНЕ НА ФИНАНСОВИТЕ ПАЗАРИ

Определянето на променливостта на възвръщаемостта от даден финансов актив на базата на исторически данни за цените обикновено се извършва чрез ценовите съотношения от стойности, реализирани за два съседни периода. Този подход не отразява цялостно колебанията на финансовите пазари, тъй като при тях се наблюдават сравнително близки стойности при два съседни периода. Това пречи на по-пълното обхващане на променливостта в иконометричните модели, отнасяни към времеви редове от данни и търсещи взаимосвързаност между отделните стойности на тези редове (автокорелации). Такива са моделите GARCH, успяващи по-пълно да обхванат явления на финансовата търговия като автокорелации и клъстери на променливостта. Прилагането на подхода на обхвата, базиран на разликата между най-високата и най-ниската реализирана цена през даден търговски ден, при използването на тези модели води до пълно (точно) отразяване на реалната динамика на променливостта на дневната възвръщаемост. Разгледани са различни подходи при неговото отразяване в моделите GARCH - от динамика на средната му стойност до използването му като изразител на динамиката на условната променливост на възвръщаемостта. По този начин използването на обхвата може да се разглежда като естествено развитие на GARCH моделите, водещо до подобряване на тяхната обясняваща и прогнозна стойност в процеса на иконометричното моделиране на променливостта.

JEL: C32

Алтернативен подход при определянето на условната променливост ни дават базираните на обхвата модели на генерализираната авторегресионна условна хетероскедастичност - GARCH. Специфичното при тях е използването на обхват от ценови колебания като изразител на променливостта, стойността на който се получава като разлика между най-високата и най-ниската реализирана цена през даден търговски ден, като по този начин се постига по-пълно обхващане колебанията на променливостта на дневната възвръщаемост. Използването на обхвата идва като алтернатива на прилагането на абсолютна възвръщаемост, т.е. на разлика между цената на финансовите актив за дадения период и същата за предходния. Определената чрез обхвата дневна променливост изразява по-пълно колебанията в променливостта, тъй като често се наблюдава, че цената на даден финансов актив при затваряне на пазара е близка до тази при отваряне въпреки значителните колебания в рамките на търговския ден. Така определената дневна променливост ни дава по-пълна представа за нейната динамика, което намира своето отражение при използването й за детерминиране на условната променливост. Доказателства за по-голямата ефективност на обхвата като изразител на променливостта можем да намерим в изследванията на *Parkinson (1980), Garman and Klass (1980), Schwert (1990), Anderson and Bollerslev (1998), Gallant et al.(1999), Alzadeh, Brandt and Diebold (2002), Chou (2005), Brand and Diebold (2006), Brand and Jones (2006).* Освен по високата си информационна стойност обхватът показва и следните важни характеристики: разпределението на логаритмичния обхват е приблизително Гаусово *(Alzadeh, Brandt and Diebold, 2002)*, което прави базираното на обхват изчисляване на модели на променливостта високоефективно и същевременно просто. Разпределението на обхвата е представено за пръв път от *Feller (1951)*, който използва процес, следващ Брауново движение с нулево отклонение.

Информацията, носена от обхвата, позволява да се правят ясни разграничения между конкуриращи се модели, които са неразграничими, когато се използват само абсолютни възвръщаемости при изчисленията. Когато се оценява точността на GARCH моделите при тяхното отразяване на променливостта, трябва да се отбележи един факт, който затруднява това оценяване, а именно, че условната променливост не е директно наблюдаема величина. Това прави избора на изразител на променливостта от съществено значение. Единият подход при неговия избор е да се използва променливост, получена като разлика от цените, реализирани по време на два търговски дни. Другият подход е да се използва т. нар. реализирана променливост *(Anderson and Bollerslev, 1998)*, позната също като реализирана изменчивост - формулировка, представена от *Barndorff-Nielsen and Shephard (2002)*. Това е метод, който изисква да се правят периодични наблюдения на цената в рамките на търговския ден и получените данни да се използват за определяне на дневната променливост. По този начин се генерира един ефективен заместител на променливостта, който при голям брой наблюдения дава стойност, най-близка до “безмоделно" измерване на условната променливостта. Свойствата на реализираната променливост са разглеждани и от *Anderson, Bollerslev, Diebold and Labys (2001)*, които стигат до извода, че тя е надежден измерител на дневната променливост. При експеримент на *Anderson and Bollerslev (1998)* са правени наблюдения на всеки 5 минути по време на търговския ден, т.е. общо 288 наблюдения, от които да се определи реализираната променливост. Това е обемна работа, налагаща ползването на модификация на този подход, базирана върху прилагане на обхват от ценови стойности, изразен като разлика между най-висока и най-ниска цена, постигната през търговския ден. Така се постига един ефективен и сравнително достъпен модел (доколкото информацията за достигнатите крайни ценови стойности на финансови пазари е лесно и свободно достъпна).

Възможностите за приложение на разликата между най-висока и най-ниска цена като изразител на променливостта са представени от *Parkinson (1980).* Нея авторът използва при създадения от него иконометричен модел на променливостта -(PARK daily volatility estimator). Този метод за определяне на дневната променливост приема, че при дневните изменения на цената на даден финансов актив се следва Брауново движение. Използването на PARK обхват се прилага при моделирането на условната променливост чрез използването на генерализиран авторегресионен условен хетероскедастичен модел - GARCH-PARK-R *(Мара, 2003)*. Този модел може да се представи по следния начин:

$$\mu_t = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j R_{P_t - j} + \sum_{t=1}^{p} \beta_j \mu_{t-j}$$

където:

$$R_{P_t} = \mu_t \varepsilon_t \ ; \ \varepsilon_t \left| I_{t-1} \sim iid\left(1, \phi_t^2\right)\right.$$

Параметърът μ_t представлява условното стандартно отклонение, което е моделирано от PARK обхват - R_{pt} за дадения финансов актив за момента t .

Самият Паркинсонов обхват съгласно *Bollen and Inder (2003)* се изразява по следния начин:

$$R_{P_t} = \frac{\log\left(P_{h,t}\right) - \log\left(P_{l,t}\right)}{\sqrt{4\log(2)}} \qquad t = 1, 2, ...T$$

Нека $R_{pt} \geq 0$ за всички t и $P\ (R_{pt} < \delta | R_{pt-1},\ R_{pt-2},...)$ > 0 за всяко δ > 0 и за всяко t. Това условие определя по-голяма от нулева вероятност при R_{pt} да наблюдаваме стойности нула или близки до нея. При това условие можем да определим движението на цената на финансовия актив като Брауново движение с нулево отклонение.

Разширение на Паркинсоновия обхват като заместител на променливостта представя обхвата Гарман-Клас *(Bollen и Inder, 2003)* - R_{GKt}, където освен информация за най-високата и най-ниската цена се включва и информация за цената при започване p_{t-1} и при приключване на търговията p_t, които са представени в обхвата, както следва:

$$R_{GKt} = \sqrt{0.5\left(\log\frac{H_t}{L_t}\right)^2 - 0.39\left(\log\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)^2}$$

Очакваната средна стойност и променливост на PARK обхвата е:

$$E\left(R_{P_t}\right) = \mu_t ;$$

$$Var\left(R_{P_t}\right) = E\left(R_{P_t}^2\right) - \left[E\left(R_{P_t}\right)\right]^2$$

$$= \mu_t^2 E\left(\varepsilon_t^2\right) - \mu_t^2$$

$$= \mu_t^2\left(\phi_t^2 + 1\right) - \mu_t^2 = \mu_t^2 \phi_t^2$$

За определянето на параметрите на представения от него GARCH модел *Мара (2003)* използва квазипроцедура на максимално правдоподобие (quasi-maximum likelihood estimation). За функцията на плътността на ε_t се използва гама плътност в съответствие с *Engle and Russel (1998)* и *Engle and Gallo (2003):*

$$f\left(\varepsilon_t \middle| I_{t-1}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \varepsilon^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon_t}{\beta}\right\}$$

където $E(\varepsilon_t) = \alpha\beta = 1$ (следствие, че $\varepsilon_t \left| I_{t-1} \sim iid\left(1, \phi_t^2\right)\right.$). Следователно $a=1$ β, след което правим нужните замествания:

$$f\left(\varepsilon_t \middle| I_{t-1}\right) = \frac{\alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \varepsilon^{\alpha-1} \exp\left\{-\alpha\varepsilon_t\right\}$$

$$\Rightarrow f\left(R_{P_t} \middle| I_{t-1}\right) = f\left(\frac{R_{P_t}}{\mu_t} \middle| I_{t-1}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \alpha^{\alpha} \left(\frac{R_{P_t}}{\mu_t}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\alpha\left(\frac{R_{P_t}}{\mu_t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \alpha^{\alpha} \left(R_{P_t}\right)^{\alpha-1} \left(\mu_t\right)^{-\alpha} \exp\left\{-\alpha\left(\frac{R_{P_t}}{\mu_t}\right)\right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu_t}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(R_{P_t}\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-R_{P_t}\left(\frac{\alpha}{\mu_t}\right)\right\}$$

Оттук можем да определим условната средна стойност и променливостта на R_{pt}:

$$E\left(R_{P_t} \middle| I_{t-1}\right) = \frac{\alpha}{\alpha/\mu_t} = \mu_t$$

$$Var\left(R_{P_t} \middle| I_{t-1}\right) = \frac{\alpha}{\left(\alpha/\mu_t\right)^2} = \frac{\left(\mu_t\right)^2}{\alpha}$$

Функцията на плътността се доближава до Гаусова плътност при условие, че α нараства.

Функцията на правдоподобие е:

$$L = \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \alpha^{\alpha} \left(R_{P_t}\right)^{\alpha-1} \left(\mu_t\right)^{-\alpha} \exp\left\{-\alpha\left(\frac{R_{P_t}}{\mu_t}\right)\right\}\right]$$

Параметрите, които ни интересуват, са тези, определящи μ_t, които ще изразим като $\mu_t(\underline{\Theta})$. След това определяме логаритмичната функция на правдоподобие:

$$\log L = \gamma - \alpha \sum_{t=1}^{T} \log(\mu_t) - \alpha \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{R_{P_t}}{\mu_t} \right)$$
$$= \gamma - \alpha \sum_{t=1}^{T} \left[\log(\mu_t(\underline{\Theta})) + \frac{R_{P_t}}{\mu_t(\underline{\Theta})} \right]$$

където $\gamma = \gamma(\alpha, R_{P_t})$

Определяйки производната на логаритмичната функция правдоподобие по отношение на $(\underline{\Theta})$, получаваме:

$$\frac{\partial \log(L)}{\partial \underline{\Theta}} = -\alpha \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{1}{\mu_t(\underline{\Theta})} \frac{\partial \mu_t(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} - \frac{R_{P_t}}{\mu_t^2(\underline{\Theta})} \frac{\partial \mu_t(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} \right] = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{R_{P_t}}{\mu_t^2(\underline{\Theta})} - \frac{1}{\mu_t(\underline{\Theta})} \right] \frac{\partial \mu_t(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} = 0$$
$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{R_{P_t} - \mu_t(\underline{\Theta})}{\mu_t^2(\underline{\Theta})} \right] \frac{\partial \mu_t(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} = 0$$

Параметричният вектор $(\underline{\Theta})$ може да бъде изчислен чрез оптимизационния алгоритъм Marquardt или BHHH.

Друг GARCH модел, базиран върху използването на обхвата като изразител на дневната променливост, е експоненциалният GARCH модел (EGARCH), представен от *Brandt and Christopher (2006).* Изборът на EGARCH модел авторите обясняват с по-добрата му пригодност при моделиране на финансови данни от фондови индекси в сравнение с обикновения GARCH модел - пригодност, отбелязана от *Hentschel (1995)* на база моделиране на данни от извадка, както и възможности за прогнозиране на бъдещи стойности на изследваните финансови процеси (*Pagan and Schwert, 1990*). Експоненциалният GARCH модел е предпочетен и поради възможността му да отразява т.нар. лийверидж ефект. Естествено има и други модели, отчитащи тази асиметрия при променливостта, но рамката на модела EGARCH, която е представена от *Nelson (1991)*, отразява динамиката на логаритмичната условна променливост, на която логаритмичният обхват е линеен изразител.

Емпиричното изследване, поведено от Бранд и Джонс, е базирано на исторически данни за индекса Standard and Poor's 500 за периода 1983-2004 г. Резултатите от него показват значително подобряване на възможностите за иконометрично моделиране и прогнозиране от страна на базираните на обхвата GARCH модели в сравнение със същите модели, използващи абсолютната възвръщаемост. Големият потенциал на тези модели най-ярко се подчертава по отношение на прогнозните им възможности, като те успяват да повишат прогнозния им хоризонт до 1 година от последния период на моделиране. Това идва като контрааргумент на съществуващото до този момент схващане, че променливостта е предсказуема само в много къси времеви хоризонти.

За определяне на обхвата се приема логаритмичната финансова цена L да следва мартингел процес $dL_s=\sqrt{V_s}dW_s$, където V_s е вероятно променлива, но се приема за постоянна поне за всеки един период. Нека Q_t изразява квадратичната променливост на L_t и определя дискретен времеви процес $h_t=\sqrt{Q_t - Q_{t-1}}$, за $t=1,2,3,\ldots, T$. Приемайки V_s като константа за периода, *Alizadeh et al. (2002)* показват, че логаритмичният обхват е определен като: $D_t = \text{In}$ (max L_s - min L_s) при $s \in [t -1, t]$, имащ следното Гаусово разпределение: $D_t \sim N\left[0.43+\ln h_t, 0.29^2\right]$ е линеен изразител на логаритмичната променливост - $\text{In}\, h_t$.

Тук трябва да отбележим наблюдението на *Andersen and Bollerslev (1998)*, че дневният обхват има приблизително същото информационно съдържание, както и вземане на извадка на дневната възвръщаемост на всеки 4 часа. При използвания обхват като заместител на променливостта трябва да се отчете следното: когато цените на даден финансов пазар са ненаблюдаеми в значителен период през пазарния ден (положение, характерно за фондовите индекси), наблюдаваният обхват за този ден се характеризира с реализирането на отклонение в посока към намаляване от реалния обхват, който от своя страна също е неточен изразител на променливостта. Това се обяснява по следния начин: Тъй като цените на даден финансов пазар са ненаблюдаеми за значителен период, най-високата (ниската) цена, отчетена за определен период, е вероятно да бъде по-ниска (висока) от реалната реализирана цена, която от своя страна участва в реалния обхват, което изисква внасянето на корекции в структурата на обхвата.

Вариант за преодоляване на този проблем ни предлагат *Rogers and Satchell (1991).* При определянето на обхвата те използват цените на отваряне и затваряне за всеки ден - положение, което наблюдаваме и в обхвата на Гарман-Клас *(Bollen and Inder, 2003).* Причина за появата на отклонение в посока към намаляване от реалния обхват може да бъде намерена и в нередовната търговия с финансови активи. При по-слабо ликвидни пазари с ниска честота на наблюденията на цените е вероятно определянето на крайните стойности за дадения финансов актив, необходими за обхвата, да не се регистрират при транзакциите с този актив. Това води до отклонение на реализирания от реалния обхват в посока намаление.

Компенсирането на тази тенденция може да се осъществи чрез използване на бид-аск спредове - осъществяване на търговията при по-високите цени, характерни за аск, и по-ниските цени, характерни за бид. Това би довело до получаване на корекция на обхвата в посока увеличаване, което би компенсирало преходната тенденция към намаляване. Такава корекция би имала по-голяма стойност за отделни акции, отколкото за фондови индекси, при които тези ефекти до голяма степен са диверсифицирани от стойностно претеглената им структура.

Авторите представят прилагането на обхвата като изразител на условната променливост при едно- и двуфакторни модели на EGARCH. При еднофакторния модел (REGARCH1) условната променливост се изменя от един ден до следващия съгласно:

$$D_t \sim N\left[0.43 + \ln h_t, 0.29^2\right]$$

$$\ln h_t - \ln h_{t-1} = k\left(\theta - \ln h_{t-1}\right) + \phi X^D_{t-1} + \delta R_{t-1} / h_{t-1}$$

Тук стандартизираният логаритмичен обхват изразява логаритмичните изменения в променливостта, стандартизирането на които не оказва влияние върху динамиката на модела. Можем да разглеждаме еднофакторния модел като стандартен авторегресионен модел на логаритмичната променливост. Абстрахирайки се от частта на модела, отразяваща асиметричността - $\delta R_{t-1}/h_{t-1}$, то измененията на променливостта - $\ln h_t$ - $E_{t-1}[\ln h_t]$, които са непряко наблюдаеми, са изразени чрез стандартизираното изменение на логаритмичния обхват от очакваната му стойност X^D_{t-1}. Логиката на това заместване е, че, когато обхватът за предходен период е голям (малък) като размер в сравнение с предходното ниво на променливостта, тя предполага позитивно (отрицателно) изменение.

Промените в обхвата се изразяват чрез разликата между стандартизираното изменение на логаритмичния обхват и неговата очаквана стойност:

$$X^D_{t-1} = \frac{D_{t-1} - 0.43 - \ln h_{t-1}}{0.29}$$

Съдържанието на параметрите на еднофакторния модел е следното: θ е дългосрочна средна стойност на променливостта, κ - скорост на връщане към средната стойност, ϕ измерва чувствителността към предходните стойности на обхвата и δ е параметър, отразяващ асиметричното влияние върху променливостта от страна на отрицателните и положителните промени на възвръщаемостта.

Прилагането на двуфакторни модели цели да отрази наличието на “дългосрочна памет" при динамиката на променливостта. Мултифакторните модели могат да представят автокорелационната структура на процес с такава памет в стандартна обстановка 7(0) - *(Gallant et al., 1999)*.

Следвайки *Engel and Lee (1999)*, авторите представят двуфакторен експоненциален GARCH модел (EGARCH 2), отразяващ динамиката на променливостта:

$$\ln h_t - \ln h_{t-1} = k_h\left(\ln q_{t-1} - \ln h_{t-1}\right) + \phi_h X^D_{t-1} + \delta_h R_{t-1} / h_{t-1}$$

$$\ln q_t - \ln q_{t-1} = k_q\left(\theta - \ln q_{t-1}\right) + \phi_q X^D_{t-1} + \delta_q R_{t-1} / h_{t-1}$$

където q_t, представя бавно изменящата стохастична средна стойност, около която логаритмичната променливост h_t извършва значителни, но преходни отклонения (част от процес, определян от κ_h, $ø_h$ и δ_h). Съдържанието на параметрите θ, κ_q, $ø_q$ и δ_q е, както следва: дългосрочна средна стойност, скорост на връщане към средната стойност, чувствителност на стохастичната средна стойност към предходните стойности на обхвата и асиметрия на чувствителност на обхвата. Съвместителството между този двуфакторен модел и еднофакторен може да се види при определяне параметрите на κ_q=1, $ø_q$=0, δ_q=0.

Алтернатива на многофакторните модели в стремежа им да отразяват т.нар. "дългосрочна памет" са частично интегрираните модели (fractional integrated models). Позицията е отразена от *Brandorff-Nielsen and Shephard (2001).* Частично интегриран експоненциален GARCH модел (FIEGARCH) ни представят *Bollerslev and Mikkelsen (1996)*:

$$(1-\omega L)(1-L)^d(\ln h_t-\theta)=\phi X_{t-1}^D+\delta R_{t-1}/h_{t-1}$$

където съдържанието на X^D_{t-1}е обяснено по-горе, а параметрите θ, $ø$ и δ имат сходни интерпретации като при предходните отразявания. Параметрите ω и d отразяват постоянството на логаритмичната променливост. Трябва да откроим присъствието на члена R_{t-1}, който изразява възвръщаемостта от предходния период. Използването на възвръщаемостта в модел, базиран на стойностите на обхвата между най-висока и най-ниска цена, се прави, защото той (обхватът) не отразява посоката на движение на цената на финансовия актив. Поради тази причина се използва предходна стойност на възвръщаемостта, която да генерира асиметрия на променливостта.

Въпреки сходството между представените GARCH модели, базирани на обхват като изразител на променливостта, именно неговото дефиниране в тези модели крие различието при тях. Моделът на *Мара (2003)* отразява динамика на средната стойност на обхвата, докато обхватът на *Brand and Jones (2006)* изразява директно динамиката на условната променливост на възвръщаемостта. В такава посока на разглеждане на използването на обхвата при авторегресионните модели на променливостта можем да споменем и *Chou (2005).* Представеният от него модел се базира на динамиката на условната средна стойност на обхвата, но за разлика от споменатите автори той не прилага логаритмичен обхват.

Предимството на някои от изброените подходи, използващи обхват, би трябвало да се докаже на базата на емпирични данни за конкретен финансов актив и изследван период. Теоретично това, което обединява тези модели, е прилагането на нов подход при разглеждане и моделиране на условната променливост, основаващ се на доразвиване на успешната рамка, представена от авторегресионните модели, чрез използването на по високото информационно съдържание на обхвата.

Ценността на GARCH моделите, базирани на обхват като изразител на променливостта, се дължи на комбинирането на тези два елемента, даващи името на модела. Всеки един компонент успява да постигне по-дълбока специализация при отразяване на характеристиките на процесите, протичащи на финансовите пазари, и тяхното комбиниране води до образуването на модел, моделиращ по-успешно променливостта на тези пазари. По-добрата пригоденост идва от по-доброто отразяване на особеностите на изменение на променливостта. *Първо,* това е структурата на обхвата, даваща възможност по-цялостно да се обхванат измененията на променливостта в сравнение с използването на абсолютната възвръщаемост, тъй като много често въпреки големите като стойност изменения по време на търговския ден цените при отваряне и затваряне са близки. Изградена само въз основа на тях оценка за променливостта в дадения период не отразява пълното изменение на променливостта, а само една част от него, представена между цените на затваряне и тези на отваряне. Обхватът от своя страна включва цялостното колебание на променливостта, давайки възможност за по-точно моделиране на изследвания финансов процес. Наличието на Гаусово разпределение на логаритмичния обхват дава възможност да се построи ефективна и същевременно опростена база за моделиране на променливостта.

На второ място, използването на ARCH модели спомага за акуратност и точност на моделирането с неговите характеристики, отразяващи особеностите на капиталовите пазари, като: условна променливост, неконстантна във времето, разпределения на възвръщаемостта с по-висок ексцес, наличие на клъстери на променливостта, ливерийдж ефект, влияние на информацията, натрупана в нетърговските дни, и т.н.

Емпиричните изследвания показват, че използването на GARCH модели, базирани на обхвата, не само дава по-малки грешки при моделирането, но и постигат подобрени резултати по отношение точността на моделирането на финансови данни, демонстрирани от GARCH моделите, базирани на използването на абсолютна възвръщаемост. В този аспект можем да разглеждаме използването на обхвата като еволюция на GARCH моделите.

Използвана литература:

Andersen, T. G. and T. Bollerslev. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. - International Economic Review, 1998, 39, p. 885-905.

Alizadeh, S., M. W. Brandt, and F. X. Diebold. Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models. - Journal of Finance, 2002, 57, p. 1047-1091.

Anderson, T., T. Bollerslev, F. X. Diebold, and P. Labys. Modeling and Forecasting Realized Volatility. Working Paper 8160, National Bureau of Economic Research, March 2001.

Barndorff-Nielsen, O. E., and N. Shephard. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics. - Journal of the Royal Statistical Society, 2001, Ser. B, 63, p. 167-241.

Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard. Estimating Quadratic Variation using Realized Variance. - Journal of Applied Econometrics, 2002, 17, p. 457-477.

Bollerslev, T., R. T.Baillie, and H. O. Mikkelsen. Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility. - Journal of Econometrics, 1996, 73, p. 151-184.

Brandt, M. W., and F. X. Diebold. A No-Arbitrage Approach to Range-Based Estimation of Return Covariances and Correlations. - Journal of Business, 2006, 79, p. 61-73.

Brandt, M. W., S. J. Christopher. Volatility forecasting with range - based EGARCH models. - Journal of Business & Economic Statistics, October 2006, Vol. 24, N 4, p. 471-486.

Bollen B. and B. Inder. A Comparison of Estimators Daily Realised Volatility. - Finance Letters, 1, 2003, p. 29-34.

Chou, R. Y. Forecasting Financial Volatilities With Extreme Values: The Conditional Autoregressive Range (CARR) Model. - Journal of Money, Credit and Banking, 2005, 37, p. 561-682.

Engle, R. F., and G. G. J. Lee. A Permanent and Transitory Model of Stock Return Volatility. – In: Engle, R. F. and H. White (eds.). Cointegration, Causality, and Forecasting: A Festschrift in Honor of Clive W. J. Granger. New York: Oxford University Press, 1999, p. 475-497.

Engle, R. F. and J. Russell. Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data. - Econometrica, 1998, 66, p. 1127-1162.

Engle, R. F. and G. Gallo. A Multiple Indicators Model for Volatility Using Intra-Daily Data. Working Paper 10117, National Bureau of Economic Research, November 2003.

Feller, W. The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables. - The Annals of Mathematical Statistics, 1951, Vol. 22, N 3, p. 427-432.

Gallant, A. R., C. T. Hsu, and G. E. Tauchen. Using Daily Range Data to Calibrate Volatility Diffusions and Extract the Forward Integrated Variance. - Review of Economics and Statistics, 1999, 81, p. 617-631.

Garman, M. B., and M. J. Klass. On the Estimation of Price Volatility from Historical Data. - Journal of Business, 1980, 53, p. 67-78.

Hentschel, L. All in the Family: Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models. - Journal of Financial Economics, 1995, 39, p. 71-104.

Mapa, D. S. A range-based GARCH model for forecasting financial volatility. - The Philippine Review of Economics, 2003, 15(2), p. 73-90.

Parkinson, M. The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. - Journal of Business, 1980, 53, p. 61-65.

Pagan, A. R., and G. W. Schwert. Alternative Models for Conditional Stock Volatility. - Journal of Econometrics, 1990, 45, p. 267-290.

Rogers, L. C. G., and S. E. Satchell. Estimating Variance From High, Low, and Closing Prices. - The Annals of Applied Probability, 1991, 1, p. 504-512.

Schwert, G. W. Stock Volatility and the Crash of '87. - Review of Financial Studies, 1990, 3, p. 77-102.

7.V.2009 г.