

ЕВРИСТИЧЕН ПОДХОД ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЕФЕКТИВНИ ГРАНИЧНИ ПОРТФОЛИА С ПОВЕЧЕ ОТ ДВА АКТИВА - КАЗУСЪТ НА ЗАГРЕБСКАТА ФОНДОВА БОРСА (ZSE)

Изчислено е портфолио с минимална дисперсия и ефективна граница на портфолио, когато има повече от два актива. Използвана е матричната алгебра, прилагана върху ценни книжа, които се търгуват на Загребската фондова борса (ZSE). Изследването показва, че поради ниската корелация на базовите активи рисковете от инвестициите могат да се ограничат значително чрез създаване на портфолио на ценните книжа. Посочено е, че ако бъдат наложени ограничения върху краткосрочните продажби, съществено ще спадне възможността за диверсификация.

JEL: G11; G31; C02

В специализираната литература (вж. Ross, 1976; Chen, Roll, Ross, 1986; Van Horne, Wachowicz, 2008) ефикасните изчисления на портфолио обикновено се представят на базата на два актива, а ситуация с повече от два актива се описва по-общо - без подробни изчисления. За да може обаче модерната портфолио теория (МПТ) да намери приложение в реалността, трябва да се разгледа случаят с повече от два актива. Въпреки че в практиката обикновено се използва специален софтуер за ефективно изчисляване на портфолио, познаването на математическите процедури е много полезно за изясняване на теоретичната логика на модерната портфолио теория.

МПТ е математическа формулировка на концепцията за диверсификация на инвестирането с цел избиране на набор от инвестиционни активи, които общо имат по-малък риск, отколкото всеки актив поотделно. Ако даден инвеститор трябва да избира между две портфолия с еднаква очаквана възвръщаемост, той би предпочел този с по-малък риск. Портфолиото с по-висок риск се избира само ако предлага значително по-голяма очаквана възвръщаемост, но инвеститорът, който се стреми към такава, трябва да поеме и по-високия риск. Изборът между тези възможности зависи от степента на риска за инвеститорите. Съгласно МПТ разумният инвеститор не би влягал в дадено портфолио, ако съществува друго с по-благоприятен профил за възвръщаемост с очакван риск или ако за определено ниво на риск има алтернативно портфолио с по-добра очаквана възвръщаемост (Chen et al., 1990). В теорията като заместител на риска се използва стандартното отклонение при възвръщаемост, което е валидно, ако възвръщаемостта на активите общо има или нормално, или елипсовидно разпределение по други начини. Възвръщаемостта на едно портфолио е пропорционално претеглена комбинация от тази на съставните активи. Волатилността на дадено портфолио е функция на корелациите (ρ_{ij}) на съставните активи за всички двойки

* Университет на Дубровник, катедра „Икономика и бизнес“, tonci.svilokos@unidu.hr

активи. Ефективното портфолио от активи дава най-ниската дисперсия на възвръщаемост на всички портфолия, които имат еднаква очаквана възвръщаемост. Същевременно може да се твърди, че дадено ефективно портфолио има най-висока очаквана възвръщаемост на всички портфолия, които имат еднаква дисперсия (Benninga, 2000).

Примерът, на който е основано това изследване, е свързан с проблема за оценяването на портфолио с минимална дисперсия и портфолио с ефективна граница. Той е съставен от избрани акции от Загребската фондова борса, а критериите за подбор са следните: акцията трябва да бъде вписана в официалния пазар на ZSE, да бъде част от индекса на фондовия пазар CROBEX 10 и да има положителна средна възвръщаемост за наблюдавания период (май 2009 - май 2014 г.).

Преглед на литературата

След разработката на Markowitz (1952), която създава нормативната рамка за идентифициране на оптимални портфолия, МТП става обект на засилено внимание както в академичната, така и в специализираната литература. Оптималният избор на портфолио изисква да се познава очакваната възвръщаемост на всяко обезпечение, а също и дисперсията и ковариацията с възвръщаемост на други обезпечения. На практика тези данни не са известни – те трябва да се оценяват въз основа на наличната историческа или субективна информация, като грешката при оценката може да влоши желаните свойства на избраното инвестиционно портфолио. Проблемът с риска при оценката на избора на портфолио е проучен от Klein et.al. (1976). Авторите показват, че като се вземе предвид несигурността на оценката, допустимият набор от портфолия при нормално разпределена възвръщаемост и неинформативни или инвариантни приоритети е идентичен с този при традиционния анализ. Въпреки това в резултат от оценката на риска оптималният избор на портфолио се различава от получения при традиционния анализ. За други правдоподобни приоритети е доказано, че допустимият набор и следователно оптималният избор се различават от прилаганите в традиционния анализ.

Според Tobin (1958) при определени условия моделът на Markowitz предполага, че процесът на инвестиционен избор може да се раздели на два етапа: първо, избор на уникална оптимална комбинация от рискови активи и второ, отделен избор относно разпределението на средствата между такава комбинация и единичен безрисков актив.

Sharpe (1963) описва предимствата от използването на диагонален модел на зависимостите между ценните книжа за практическо приложение по метода на Markowitz за анализ на портфолио. За да се възползва напълно от модела, авторът разработва компютърна програма. Въз основа на получените от изследването резултати той стига до заключението, че диагоналният модел е в състояние да представя много добре връзките между ценните книжа и че стойността на портфолио анализа, базиран върху този модел, надвишава номиналната им стойност.

Gennotte (1986) изследва оптималния избор на портфолия по непълна информация. Използвайки наблюдения от реализирана възвръщаемост в миналото, той установява оптимални измерители за ненаблюдаеми очаквани моментни постъпления и показва как да се реши въпросът за избор на портфолио на два отделни етапа. Освен това, анализирайки влиянието на грешката при оценката на инвестиционни решения, авторът стига до извода, че последиците от тази грешка не трябва да се пренебрегват, дори ако получената възвръщаемост се наблюдава непрекъснато в продължение на безкраен период.

Davis и Norman (1990) изучават избора на портфолио, свързан с разходите по сделката. Те стигат до заключението, че оптималният избор на инвестиции за покупко-продажба между банкова сметка, по която се плаща фиксиран лихвен процент, и акция, чиято цена е логнормално разпределена, са местните характеристики на двуизмерен процес на клиновидна област, който се определя от решението на проблем за нелинейната свободна граница. В същото изследване авторите предлагат и алгоритъм за решаването на този проблем.

В редица разработки се използват различни математически подходи за развитието на МПТ (Zimmermann et.al, 2001; Hung et. al, 1996). Както на теория, така и на практика един от най-важните фактори за инвестиции е мярката за изпълнение на портфолио. Според последните проучвания в областта на математическото програмиране някои изследователи предлагат различни видове портфолио модели, базирани върху ослучайностени характеристики (Lin and Hsieh, 2004; Parra et. al., 2001).

Спецификация на модела

Според първоначалните критерии за избор инвеститорът трябва да вземе решение по отношение на инвестициите в акции на четири дружества на ZSE: AD Plastik (ADPL), Atlantic Grupa dd (ATGR), Ledo dd (LEDO) и Podravka dd (PODR). Тук R_i ($i=ADPL, ATGR, LEDO, PODR$) означава месечна непрекъсната обща възвръщаемост (CC) за акция i . Приемаме, че R_i са съвместно нормално разпределени - $R_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, и че има следната информация за средните, дисперсиите и ковариациите на вероятностното решение на възвръщаемостта:

- (1) $\mu_i = E[R_i]$
- (2) $\sigma_i^2 = Var(R_i)$
- (3) $cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij}$

Стойността на μ_i и σ_i^2 може да се оцени от исторически данни за възвръщаемост. Тъй като възвръщаемостта е случайна, реализираните постъпления могат да се различават от очакванията, поради което дисперсиите предвиждат мерки за несигурност или риск, свързан с месечната възвръщаемост (Zivot, 2002).

Портфолио X се състои от четири актива, чиито портфолио тегла се допълват до 1:

$$(4) \quad x_{ADPL} + x_{ATGR} + x_{LEDO} + x_{PODR} = 1$$

Възвръщаемостта СС на портфолио е средната аритметична претеглена стойност на възвръщаемостта на четирите различни актива:

$$(5) \quad R_{p,x} = x_{ADPL}R_{ADPL} + x_{ATGR}R_{ATGR} + x_{LEDO}R_{LEDO} + x_{PODR}R_{PODR}$$

Според матричната алгебра:

$$(6) \quad R = \begin{bmatrix} R_{ADPL} \\ R_{ATGR} \\ R_{LEDO} \\ R_{PODR} \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_{ADPL} \\ \mu_{ATGR} \\ \mu_{LEDO} \\ \mu_{PODR} \end{bmatrix}, 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_{ADPL} \\ x_{ATGR} \\ x_{LEDO} \\ x_{PODR} \end{bmatrix}$$

$$(7) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{ADPL}^2 & \sigma_{ADPL,ATGR} & \sigma_{ADPL,LEDO} & \sigma_{ADPL,PODR} \\ \sigma_{ATGR,ADPL} & \sigma_{ATGR}^2 & \sigma_{ATGR,LEDO} & \sigma_{ATGR,PODR} \\ \sigma_{LEDO,ADPL} & \sigma_{LEDO,ATGR} & \sigma_{LEDO}^2 & \sigma_{LEDO,PODR} \\ \sigma_{PODR,ADPL} & \sigma_{PODR,ATGR} & \sigma_{PODR,LEDO} & \sigma_{PODR}^2 \end{bmatrix}$$

Тук R е векторът на възвръщаемост; μ - векторът на очакваната възвръщаемост; 1 - векторът на единиците; x - вектор на портфолио; Σ - матрица на ковариация, която обобщава дисперсиите и ковариациите. Диагоналите са квадратите на волатилност, а противоположните диагонали - ковариациите.

$$(8) \quad x'1 = [x_{ADPL} \quad x_{ATGR} \quad x_{LEDO} \quad x_{PODR}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Възвръщаемостта на едно портфолио може да се запише като $x'R$:

$$(9) \quad R_{p,x} = x'R = [x_{ADPL} \quad x_{ATGR} \quad x_{LEDO} \quad x_{PODR}] \begin{bmatrix} R_{ADPL} \\ R_{ATGR} \\ R_{LEDO} \\ R_{PODR} \end{bmatrix}$$

Също така очакваната възвръщаемост от портфолио е $x'\mu$:

$$(10) \quad \mu_{p,x} = x'\mu = [x_{ADPL} \quad x_{ATGR} \quad x_{LEDO} \quad x_{PODR}] \begin{bmatrix} \mu_{ADPL} \\ \mu_{ATGR} \\ \mu_{LEDO} \\ \mu_{PODR} \end{bmatrix}$$

Дисперсията на портфолио, записана във вид на матрица, е:

$$(11) \quad \sigma_{p,x}^2 = x'\Sigma x$$

$$\sigma_{p,x}^2 = [x_{ADPL} \quad x_{ATGR} \quad x_{LEDO} \quad x_{PODR}] \begin{bmatrix} \sigma_{ADPL}^2 & \sigma_{ADPL,ATGR} & \sigma_{ADPL,LEDO} & \sigma_{ADPL,PODR} \\ \sigma_{ATGR,ADPL} & \sigma_{ATGR}^2 & \sigma_{ATGR,LEDO} & \sigma_{ATGR,PODR} \\ \sigma_{LEDO,ADPL} & \sigma_{LEDO,ATGR} & \sigma_{LEDO}^2 & \sigma_{LEDO,PODR} \\ \sigma_{PODR,ADPL} & \sigma_{PODR,ATGR} & \sigma_{PODR,LEDO} & \sigma_{PODR}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ADPL} \\ x_{ATGR} \\ x_{LEDO} \\ x_{PODR} \end{bmatrix}$$

Разпределението в дадено портфолио е:

$$(12) \quad R_{p,x} \sim N(\mu_{p,x}, \sigma_{p,x}^2)$$

Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

За да се определи ефективната граница, трябва да се изчисли ковариацията на възвръщаемост на две портфолия, които се различават само по тегла, но не и по акциите, включени в тях. Портфолио теглата и в двете се допълват до 100%. Нека y означава друго портфолио с дадените акции:

$$(13) \quad y = \begin{bmatrix} y_{ADPL} \\ y_{ATGR} \\ y_{LEDO} \\ y_{PODR} \end{bmatrix}$$

Тогава портфолио y има възвръщаемост $R_{p,y}$:

$$(14) \quad R_{p,y} = y'R$$

Така че, ако има две портфолия, когато едното е x , а другото е y , ковариацията между тях е:

$$(15) \quad cov(R_{p,x}, R_{p,y}) = x'\Sigma y = y'\Sigma x$$

За да се изчисли съотношението между портфолия, се използва (16):

$$(16) \quad corr(R_{p,x}, R_{p,y}) = \frac{cov(R_{p,x}, R_{p,y})}{\sigma_{p,x} \sigma_{p,y}}$$

Общата минимална дисперсия на портфолиото се намира на ефективната граница на рискови активи и има най-малката дисперсия. За да се намери аналитично решение за това, когато има повече от два актива, най-добрият начин е да се използва матрична алгебра.

В този случай трябва да се изчислят теглата на $m = [m_{ADPL} \ m_{ATGR} \ m_{LEDO} \ m_{PODR}]'$ портфолио във вида:

$$(17) \quad \min_{m_{ADPL}, m_{ATGR}, m_{LEDO}, m_{PODR}} \sigma_{p,m}^2 = m'\Sigma m$$

С ограничението, че сборът на портфолио теглата е 1:

$$(18) \quad m'1 = 1$$

За целта трябва да се изгради функцията на LaGrange (Bertsekas, 1999; Chiang, 1984), която за този проблем е:

$$(19) \quad L(m, \lambda) = m'\Sigma m + \lambda(m'1 - 1)$$

Представяме ограничението в хомогенна форма, умножаваме го с множител на LaGrange и след това получаваме израза, който ще бъде минимализиран. Функцията на LaGrange е функция от портфолио тегла и множител на LaGrange ламбда. Диференцираме функцията на LaGrange по отношение на m и λ и приравняваме на нула:

$$(20) \quad 0 = \frac{\partial L(m, \lambda)}{\partial m} = \frac{\partial m'\Sigma m}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} \lambda(m'1 - 1) = 2\Sigma m + \lambda 1$$

$$(21) \quad 0 = \frac{\partial L(m, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial m'\Sigma m}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda(m'1 - 1) = m'1 - 1$$

Условията от първо ниво дават две линейни уравнения, които могат да се обединят и запишат като система от линейни уравнения:

$$(22) \quad \begin{bmatrix} 2\Sigma & 1 \\ 1' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Условията от първо ниво са линейна система:

$$(23) \quad A_m z_m = b, \text{ where } A_m = \begin{bmatrix} 2\Sigma & 1 \\ 1' & 0 \end{bmatrix}, z_m = \begin{bmatrix} m \\ \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Решението за z_m е:

$$(24) \quad z_m = A_m^{-1}b$$

Първите четири елемента на z_m са теглата на портфолио $m = [m_{ADPL} \ m_{ATGR} \ m_{LEDO} \ m_{PODR}]'$ за портфолио с обща минимална дисперсия с очаквана възвръщаемост $\mu_{p,m} = m'\mu$ и $\text{Id,rd}[\sigma_p]$ и дисперсия $\sigma_{p,m}^2 = m'\Sigma m$.

Данни

В основата на използвания тук пример е оценката на портфолио с минималната дисперсия и на портфолио с ефективни граници. Избраните акции в тях се търгуват на официалния пазар и са включени в индекса CROBEX 10 на Загребската фондова борса. Според посочения първоначален набор от критерии са избрани следните акции: AD Plastik (ADPL), Atlantic Grupa dd (ATGR), Ledo dd (LEDO) и Podravka dd (PODR). По отношение на движението на цените на акциите се изчислява непрекъснато натрупвана сложна (СС) възвръщаемост. Динамичният ред включва 60 месечни СС постъпления. Източникът на данни за изчисление е Загребската фондова борса. Описателните статистически характеристики за избраните акции са представени в табл. 1.

Таблица 1

Описателни статистически характеристики

	ADPL	ATGR	LEDO	PODR
Средно значение	0.011510	0.008867	0.011212	0.011969
Медиана	0.014004	0.010233	0.002496	0.005899
Максимално значение	0.170886	0.183251	0.166665	0.173440
Минимално значение	-0.073094	-0.110791	-0.118130	-0.126023
Статистическо отклонение	0.059560	0.054831	0.055979	0.066849
Асиметрия	0.557660	0.445303	0.345902	0.257397
Връхна източност (ексцес)	2.665580	3.932845	3.254464	2.795047
Jarque-Bera	3.389443	4.158449	1.358362	0.767547
Вероятност	0.183650	0.125027	0.507032	0.681286
Сума	0.690620	0.532027	0.672711	0.718164
Обща девиация	0.209299	0.177380	0.184885	0.263658
Брой наблюдения	60	60	60	60

Източник. Собствени изчисления с помощта на софтуер пакет EViews 7.0.

От табл. 1 се вижда, че разпределението на всички дълги акции е ляво-странно (положителна асиметрия). Акциите на ADPL и PODR имат поднормален ексцес, а разпределението на ATGR и LEDO - свръхнормален ексцес. Въпреки това получените вероятности за Jarque-Bera теста за всички променливи са над 0,05, което означава, че не може да се отхвърли нулевата хипотеза на Jarque-

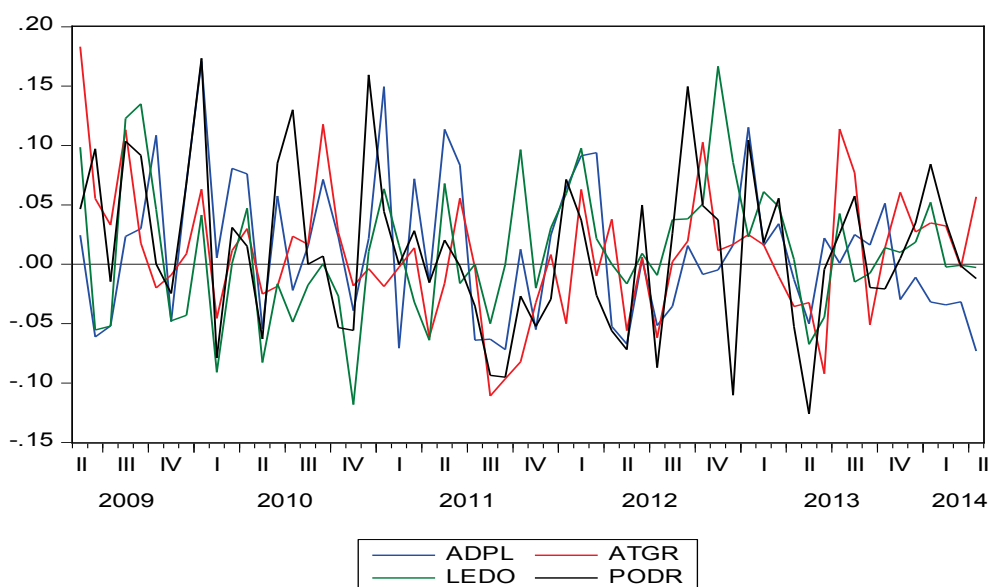
Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

Bera теста, т.е. че има нормално разпределение на променливата при 5% равнище на значимост. Месечната средна СС възвръщаемост на ценните книжа по време на анализирания период е между 0,8 и 1,2% (всички са положителни), а ако се изчислят за година, годишната възвръщаемост е между 9,6 и 14,4%. Динамичният ред има месечна стандартни отклонения от около 6%.

На фиг. 1 е представена месечната СС възвръщаемост на избраните активи. В случая динамичните редове изглеждат като *бял шум* по закона на Gauss. Волатилността на всички динамични редове изглежда постоянна (със стационарна ковариация). Очевидно данните се колебаят около нулата, без да се забелязва никаква тенденция. Изглежда, тук има положителни корелации между активите.

Фигура 1

Месечна СС възвръщаемост на AD Plastik (ADPL), Atlantic Grupa dd (ATGR), Ledo dd (LEDO) и Podravka dd (PODR)



Източник. Собствени изчисления с помощта на софтуер пакет EViews 7.0.

По-нататъшният анализ се основава на предположението за слаба стационарност на времевия ред. Това означава, че той има постоянно средно равнище, постоянна дисперсия за целия изследван период и че ковариацията между два периода зависи само от интервала между тях, а не от разпределението им във времето. Значението на стационарността на динамичния ред намира отражение във възможността за обобщаване на динамичния анализ на извадки върху цялата съвкупност. За тестване на стационарност се из-

ползва Unit Root Test (тест за единичен корен), разработен от Dickey и Fuller (1979).

Резултатите от тестовете са представени в табл. 2. Нулевата хипотеза е предположението, че H_0 - редът е нестационарен (има единичен корен). Тази хипотеза не може да бъде отхвърлена, ако изчислената стойност ADF е по-голяма от критичната стойност. Както се вижда от таблицата, тестът ADF предполага, че за всички променливи (активи) нулевата хипотеза H_0 с равнище на значимост от 1% се отхвърля. За да се избегне автокорелация на остатъците в авторегресионен модел, се избира лаг (забавяне) въз основа на информационния критерий на Akaike (AIC).

Таблица 2

Тест за единичен корен

Модел	Свободен член		Без тенденция и свободен член		Модел	
ADF тест	ADF	Лаг	ADF	Лаг	ADF	Лаг
ADPL	-6.828415***	0	-7.1108***	0	-6.6776***	0
ATGR	-6.726417***	0	-6.5931***	0	-6.7361***	0
LEDO	-6.159686***	0	-6.2444***	0	-6.0836***	0
PODR	-6.846060***	0	-6.9342***	0	-6.7350***	0
	1% test critical level: -3.5461, 5% test critical level: -2.9117, 10% test critical level: -2.5935		1% test critical level: -4.1213, 5% test critical level: -3.4878, 10% test critical level: -3.1723		1% test critical level: -2.6047, 5% test critical level: -1.9464, 10% test critical level: -1.6132	

Забележка. *** е отхвърляне на H_0 при 1% равнище на значимост, ** - отхвърляне на H_0 при 5% равнище на значимост, * - отхвърляне на H_0 при 10% равнище на значимост.

Тук не са представени резултатите от другите тестове за наличие на единични корени Unit root tests (PP, KPSS), които също са проведени. Те водят до аналогични заключения.

Източник. Собствени изчисления с помощта на софтуер пакет EViews 7.0.

Ковариацията измерва посоката, но не и силата на линейната зависимост. Ако искаме да разберем не само посоката, но и силата на връзката, трябва да се изчисли корелацията. Според дефиницията на Pearson тя е просто ковариацията, разделена на корен квадратен от произведението на дисперсиите. Корелацията на Pearson - +1, когато е налице пълна положителна (нарастваща) линейна зависимост (корелация); -1 при пълна намаляваща (отрицателна) линейна зависимост (антикорелация) и някои стойности между -1 и +1 във всички останали случаи, показва степента на линейна зависимост между променливите. С приближаването на коефициента към нула теснотата на връзката намалява и започва да клони към липса на корелация. Колкото коефициентът е по-близо до -1 или +1, толкова по-силна е корелацията между променливите (Dowdy, Wearden, 1983).

От табл. 3 се вижда, че всички променливи имат положителна ковариация. Това показва, че те са с склонни да се изменят в същата посока и че не същест-

Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

вува силна корелация между някои базови активи, което е добро свойство на диверсификацията на портфолиото.¹

Таблица 3

Ковариационен и корелационен анализ

Ковариационен анализ: обикновен		Извадка: 2009M05 2014M04			Набл.: 60
Ковариация	ADPL	ATGR	LEDO	PODR	
ADPL	0.003488				
ATGR	0.000642	0.002956			
LEDO	0.001206	0.001004	0.003081		
PODR	0.001744	0.001625	0.001329	0.004394	
Корелация	ADPL	ATGR	LEDO	PODR	
ADPL	1.000000				
ATGR	0.199959	1.000000			
LEDO	0.367852	0.332778	1.000000		
PODR	0.445480	0.450760	0.361249	1.000000	

Източник. Собствени изчисления с помощта на софтуер пакет EViews 7.0.

Емпирични резултати

Рискови характеристики за възвръщаемост на случайно портфолио

Въз основа на изчисленията за СС възвръщаемост на ADPL, ATGR, LEDO и PODR (вж. фиг. 1) сме пресметнали очакваната възвръщаемост μ и ковариационната матрица Σ (вж. табл. 1 и 3).

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.01151 \\ 0.008867 \\ 0.011212 \\ 0.011969 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.00349 & 0.00064 & 0.00121 & 0.00174 \\ 0.00064 & 0.00297 & 0.00100 & 0.00163 \\ 0.00121 & 0.00100 & 0.00308 & 0.00133 \\ 0.00174 & 0.00163 & 0.00133 & 0.00440 \end{bmatrix}$$

Можем да изчислим дисперсията, стандартното отклонение и очакваната възвръщаемост за портфолио (x_{EW}) и произволно избрано long-short портфолио (y_{LS}) с еднакви тегла чрез (10) и (11), а след това и ковариацията и корелацията между тези два вида портфолио чрез (15) и (16). При Long-short портфолио теглата на портфолиото трябва да се сумират до единица, но някои от тях могат да са отрицателни. Практически това означава, че инвеститорът, който скъсява актива и приема постъпленията от тази къса продажба, трябва да купува повече други активи.

Избраните видове портфолио са:

$$x_{EW} = \begin{bmatrix} x_{ADPL} \\ x_{ATGR} \\ x_{LEDO} \\ x_{PODR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad y_{LS} = \begin{bmatrix} y_{ADPL} \\ y_{ATGR} \\ y_{LEDO} \\ y_{PODR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.09 \\ -0.28 \\ 0.67 \\ 0.70 \end{bmatrix}$$

¹ Данните от табл. 3 ще бъдат използвани по-нататък за изчисляване на дисперсията и ковариацията на портфолиото.

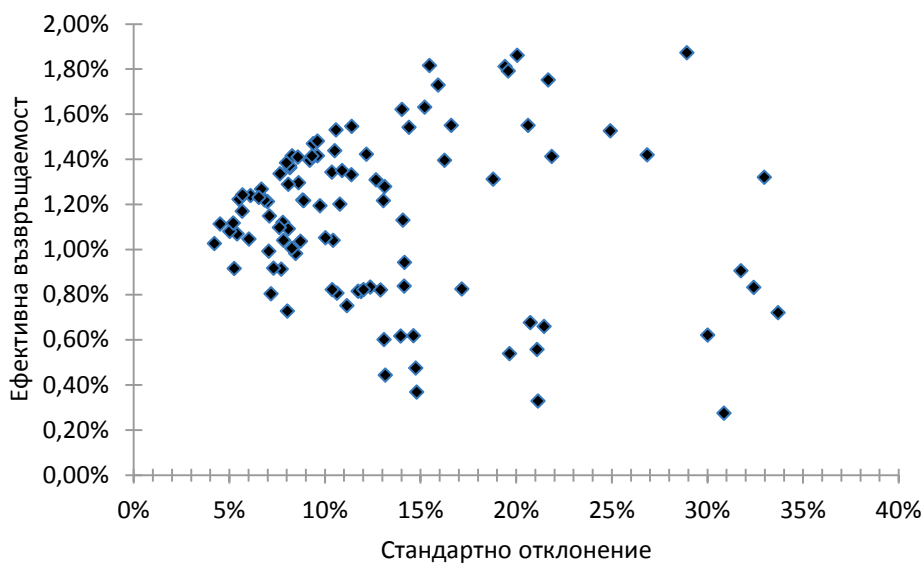
Резултатите:

$$\begin{aligned}
 R_{p,x_{EW}} x'_{EW} \cdot R &= 0.0109, \\
 R_{p,y_{LS}} y'_{LS} \cdot R &= 0.0124, \\
 \sigma_{p,x_{EW}}^2 &= x'_{EW} \cdot \Sigma \cdot x_{EW} = 0.00181, \sigma_{p,x_{EW}} = 0.0425, \\
 \sigma_{p,y_{LS}}^2 &= y'_{LS} \cdot \Sigma \cdot y_{LS} = 0.00374, \sigma_{p,y_{LS}} = 0.0612, \\
 cov(R_{p,x_{EW}}, R_{p,y_{LS}}) &= x'_{EW} \cdot \Sigma \cdot y_{LS} = y'_{LS} \cdot \Sigma \cdot x_{EW} = 0.0021 \\
 corr(R_{p,x_{EW}}, R_{p,y_{LS}}) &= \frac{cov(R_{p,x_{EW}}, R_{p,y_{LS}})}{\sigma_{p,x_{EW}} \cdot \sigma_{p,y_{LS}}} = 0.808
 \end{aligned}$$

Ясно се вижда, че портфолиото и long-short портфолиото с еднакви тегла имат положителна ковариация. Корелацията между тях е 0,808, което означава, че те са с висока положителна корелация.

Фигура 2

Рискови характеристики за възвръщаемост на случайно портфолио



Източник. Собствени изчисления с помощта на софтуер пакет EViews 7.0.

На фиг. 2 е показано съотношението възвръщаемост - риск. Оста X измерва волатилността (ниво на риск), а оста Y - възвръщаемостта. Въз основа на четири активи (ADPL, ATGR, LEDO и PODR) са създадени 100 произволни вида портфолио, подобно на x_{EW} и y_{LS} , чиито тегла са сумирани до 1. Всяко портфолио е представено с една точка – това са възможните видове портфолио, в които може да се инвестира. Очевидно е, че има портфолио клъстери с еднаква

Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

очаквана възвръщаемост, но различни стандартни отклонения, както и обратното - с еднакви стандартни отклонения и различна очаквана възвръщаемост. Много по-добре е да се инвестира в портфолия, които са разположени в горния ляв, отколкото в долния десен ъгъл, тъй като първите имат по-висока средна възвръщаемост и по-малък риск.

Фиг. 2 показва, че когато се премине от случай с два актива към такъв с три или повече активи, съотношението риск - възвръщаемост между портфолия вече не лежи на една права линия, а всъщност изпълва цялото пространство. Ако се изчислят тези видове портфолио няколко пъти, ще се получи форма във вид на полумесец - тя ще съдържа съвкупност от потенциални портфолия, в които може да се инвестира, но горната граница на тази форма са ефективните портфолия. Markowitz (1991) предлага математически начини за определяне на нейната границата за възможност за инвестиции, която определя набора от ефективни портфолия.

Портфолио с обща минимална дисперсия

За да се изчисли $m = [m_{ADPL} \ m_{ATGR} \ m_{LEDO} \ m_{PODR}]'$, може да се използват (23) и (24):

$$m = [m_{ADPL} \ m_{ATGR} \ m_{LEDO} \ m_{PODR}]':$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0.00698 & 0.00128 & 0.00241 & 0.00349 & 1 \\ 0.00128 & 0.00591 & 0.00200 & 0.00325 & 1 \\ 0.00241 & 0.00200 & 0.00616 & 0.00266 & 1 \\ 0.00349 & 0.00349 & 0.00266 & 0.00879 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, z_m = \begin{bmatrix} m_{ADPL} \\ m_{ATGR} \\ m_{LEDO} \\ m_{PODR} \\ \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_m = A_m^{-1}b = \begin{bmatrix} 165.753 & -22.306 & -75.637 & -67.810 & 0.291 \\ -22.306 & 177.828 & -78.523 & -76.999 & 0.385 \\ -75.637 & -78.523 & 183.318 & -29.159 & 0.288 \\ -67.810 & -76.999 & -29.159 & 173.968 & 0.035 \\ 0.291 & 0.385 & 0.288 & 0.035 & 0.003 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.291 \\ 0.385 \\ 0.288 \\ 0.035 \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

По този начин портфолиото с минимална дисперсия има 29,1% AD Plastik, 38,5% Atlantic Grupa dd, 28,8% Ledo и 3,5% Podravka dd.

Очакваната възвръщаемост, дисперсията и стандартното отклонение на това портфолио са:

$$\mu_{p,m} = m'\mu = [0.291 \ 0.385 \ 0.288 \ 0.035] \begin{bmatrix} 0.01151 \\ 0.008867 \\ 0.011212 \\ 0.011969 \end{bmatrix} = 0.01042$$

$$\sigma_{p,m}^2 = m'\Sigma m =$$

$$[0.291 \ 0.385 \ 0.288 \ 0.035] \begin{bmatrix} 0.00349 & 0.00064 & 0.00121 & 0.00174 \\ 0.00064 & 0.00297 & 0.00100 & 0.00163 \\ 0.00121 & 0.00100 & 0.00308 & 0.00133 \\ 0.00174 & 0.00163 & 0.00133 & 0.00440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.291 \\ 0.385 \\ 0.288 \\ 0.035 \end{bmatrix} = 0.00168$$

$$\sigma_{p,m} = 0.0409$$

От (23) и (24) се вижда, че минималната дисперсия на портфолиото зависи само от матрицата на ковариацията, а не от очакваната възвръщаемост.

Портфолио с целева очаквана възвръщаемост и най-малка дисперсия

На практика може да възникне и друг проблем - определянето на портфолио с най-малък риск, измерен чрез дисперсията на портфолио, с което се постига целевата очаквана възвръщаемост. Всъщност този проблем е само разширяване на (17) с допълнително ограничение:

$$(25) \quad \min_{x_{ADPL}, x_{ATGR}, x_{LEDO}, x_{PODR}} \sigma_{p,x}^2 = x' \Sigma x$$

$$(26) \quad \mu_{p,x} = x' \mu = \mu_p^0 = \text{target return}$$

$$(27) \quad x' 1 = 1.$$

Също, както и преди, тук може да се използва функция на LaGrange:

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = x' \Sigma x + \lambda_1 (x' \mu - \mu_{p,0}) + \lambda_2 (x' 1 - 1)$$

$$(28) \quad 0 = \frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x} = 2 \Sigma x + \lambda_1 \mu + \lambda_2 1$$

$$(29) \quad 0 = \frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = x' \mu - \mu_{p,0}$$

$$(30) \quad 0 = \frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = x' 1 - 1.$$

Условията от първи ред могат да се представят в матрична форма като линейна система:

$$(31) \quad A_x z_x = b_0, \text{ където } A_x = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & 1 \\ \mu' & 0 & 0 \\ 1' & 0 & 0 \end{bmatrix}, z_x = \begin{bmatrix} x \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_{p,0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решението за z_x е:

$$(32) \quad z_x = A_x^{-1} b_0.$$

Първите четири елемента от z_x дават оптималните тегла на портфолиото $x = [x_{ADPL} \ x_{ATGR} \ x_{LEDO} \ x_{PODR}]'$, които минимизират дисперсията до целевата очаквана възвръщаемост $\mu_{p,x} = \mu_{p,0}$.

За да се намери портфолио със същата възвръщаемост като PODR, могат да се използват (31) и (33), а за да се изчисли дисперсията - (11). Решението на този проблем е:

$$x = \begin{bmatrix} 0.3484 \\ -0.1604 \\ 0.4459 \\ 0.3662 \end{bmatrix}, \quad \mu_{p,x} = 0.012, \quad \sigma_{p,x}^2 = 0.0025$$

Това портфолио има същата средната възвръщаемост както PODR, но е с по-ниска волатилност - 5%, при 6.9% за PODR (вж. табл. 1).

Граница на портфолиото

Минималната дисперсия на портфолио, както и на изчисленото преди това, което има същата средна възвръщаемост като PODR, но е с по-ниска волатилност, са двете най-ефективни портфолия и се намират на портфолио грани-

Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

цата. Както посочва Black (1972), границата на портфолиото може да бъде представена като изпъкнала функция на всеки две гранични портфолия, разположени на границата. Ако X и Y са две портфолия, разположени на границата, и ако $X \neq Y$, а α е някаква константа, тогава портфолиото

$$(33) \quad z = \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y \text{ е разположено на границата с } \mu_{p,z} = z' \mu \text{ и } \sigma_{p,z}^2 = z' \Sigma z.$$

Местоположението на z портфолио на границата зависи от α (α може да бъде всяко число). Ако $\alpha=1$, портфолио z е равно на x , ако $\alpha=0$, то е равно на y , а ако $\alpha=1/2$, е по средата между x и y . Ако $\alpha=2$, има две x портфолия и едно минус y портфолио, което е long-short портфолио.

Може да се използва α , за да се изчисли $\mu_{p,z}$ и $\sigma_{p,z}^2$:

$$(34) \quad \mu_{p,z} = \alpha \mu_{p,x} + (1 - \alpha) \mu_{p,y}$$

$$(35) \quad \sigma_{p,z}^2 = \alpha^2 \sigma_{p,x}^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_{p,y}^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_{x,y}$$

В предишните изчисления се стигна до две гранични портфолия - с минимална дисперсия и със същата възвръщаемост, както PODR. Използвайки (33), (34) и (35), може да се изчисли портфолио z , $\mu_{p,z}$ and $\sigma_{p,z}^2$ с произволно $\alpha=0,5$:

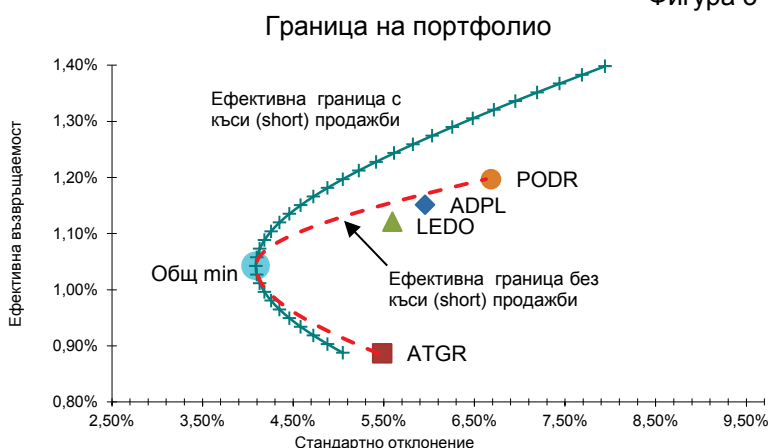
$$z = 0.5 \begin{bmatrix} 0.291 \\ 0.385 \\ 0.288 \\ 0.035 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0.3484 \\ -0.1604 \\ 0.4459 \\ 0.3662 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3197 \\ 0.1126 \\ 0.3670 \\ 0.2006 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{p,z} = 0.5 \cdot 0.01042 + 0.5 \cdot 0.012 = 0.01121$$

$$\sigma_{p,z}^2 = (0.5)^2 (0.00168)^2 + (0.5)^2 (0.0025)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.0017) = 0.0019$$

Портфолио z се намира на границата между това с минимална дисперсия и портфолиото, което има същата възвръщаемост както PODR. Всички портфолия, разположени на границата на портфолиото, могат да се проследят, използвайки различни стойности за α (вж. фиг. 3 и Приложението).

Фигура 3



Източник. Собствени изчисления с помощта на софтуер пакет EViews 7.0.

Вижда се, че само портфолия, разположени горе вдясно от портфолиото с минимална дисперсия (вкл. и самото то), са ефективни портфолия, а всички под портфолиото с обща минимална дисперсия не са ефективни. Всички портфолия на ефективната граница имат най-малък риск за дадена целева възвръщаемост. Ако инвеститорът не е много склонен да поема риск, той ще избере портфолия, много близо до това с обща минимална дисперсия. Ако обаче е готов да поеме по-голям риск, инвеститорът може да получи по-висока средна възвръщаемост, избирайки портфолио от границата, която се намира в горния десен ъгъл. Това портфолио обикновено включва някои къси продажби (отрицателни активи), но в конкретния пример със ZSE на практика няма такава възможност. Ако наложим ограничения върху късите продажби ($x_i \geq 0$), ефективната граница с тях не е възможна (Benninga, 2000). Налични са само портфолия на пунктираната линия (вж. фиг. 3). Портфолио с къси продажби short sale обикновено е по-ефективно (или поне също толкова ефективно) за определено ниво на риск, защото има по-висока очаквана възвръщаемост при същото ниво на риск.

*

За да се създаде портфолио с повече от два актива на базата на МПТ е подходящо да се използва матричната алгебра. Разгледаният пример показва, че поради ниската корелация на базовите активи е възможно да се намалят значително рисковете от инвестиции чрез създаване на портфолио с избрани акции от официалния пазарен сегмент на ZSE.

Портфолиото с минимална дисперсия има 29,1% AD Plastik, 38,5% Atlantic Grupa dd, 28,8% Ledo и 3,5% Podravka dd, очакваната месечна възвръщаемост е 1,04%, а стандартното отклонение – 4,09%. Ако сравним тези числа с възвръщаемостта и стандартното отклонение на всеки отделен капитал (вж. табл. 1), можем да видим всички ползи от диверсификацията. Освен това с помощта на матричната алгебра и функцията на LaGrange е възможно да се изчисли портфолио, което ще има желаната възвръщаемост. Портфолио с 34,84% от AD Plastik, -16,04% от Atlantic Grupa dd, 44,59% от Ledo и 36,62% от Podravka dd има същата средна възвръщаемост като PODR, но по-ниска волатилност. Волатилността на това портфолио е 5%, а тази на PODR - 6,9%. И двете портфолия с минимална дисперсия, както и създаденото портфолио със същата средна възвръщаемост като PODR (и по-ниска волатилност) са ефективни и лежат на портфолио границата.

Тук ефективната граница на портфолиото е изчислена въз основа на факта, че границата на портфолиото може да се представи като изпъкнала функция от всеки две гранични портфолия. Кое портфолио ще бъде избрано от инвеститорите, зависи от тяхната целева очаквана възвръщаемост или от целевия им риск. Същевременно, когато се налагат ограничения върху късите продажби, границата на портфолио без такива продажби се намира „вътре“ в границата, където те са позволени. Това значително намалява възможността за диверсификация, поради което не може да се създаде такова портфолио, което да има по-

Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

висока възвръщаемост, отколкото актива с най-високата възвръщаемост в портфолиото.

Обект на следващ анализ може да бъде изчисляването на тангентното портфолио за даден курс без риск. То ще бъде най-ефективното гранично портфолио, което има максимално съотношение на Sharpe. За да се определи емпирично оптималното портфолио, могат да се използват цифрови изчислителни процедури и компютърни симулации (например методът Monte Carlo).

Използвана литература:

- Benninga, S.* (2000). *Financial Modelling* (2nd ed.). Massachusetts Institute of Technology.
- Bertsekas, D. P.* (1999). *Nonlinear Programming* (2nd ed.). Cambridge, MA: Athena Scientific.
- Black, F.* (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. - *Journal of Business*, Vol. 45, July, p. 444–455.
- Chen, N. F., R. Roll & S. A. Ross* (1986). Economic forces and the stock market. - *Journal of business*, p. 383-403.
- Chiang, A. C.* (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Dowdy, S., S. Wearden* (1983). *Statistics for Research*. Wiley.
- Elton J. E., J. M. Gruber* (2011). *Investments and Portfolio Performance*. World Scientific.
- Hung, S. Y., T. P. Liang, & V. W. C. Liu* (1996). Integrating arbitrage pricing theory and artificial neural networks to support portfolio management. - *Decision support systems*, 18(3), p. 301-316.
- Klein, R. W., & V. S. Bawa* (1976). The Effect of Estimation Risk on Optimal Portfolio Choice. - *Journal of Financial Economics*, 3(3), p. 215-231.
- Lee, C. F., J. E. Finnerty, D. H. Wort* (1990). *Security Analysis and Portfolio Management*. Auburn, WA, USA: Scott Foresman & Co.
- Lin, C., & P. J. Hsieh* (2004). A fuzzy decision support system for strategic portfolio management. - *Decision Support Systems*, 38(3), p. 383-398.
- Markowitz, H.* (1952). Portfolio Selection. - *Journal of Finance*, 7, p. 77-91.
- Markowitz, H.* (1991). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (2nd ed.). New York: Wiley, Cambridge, MA: Basil Blackwell.
- Parra, M. A., A. B. Terol, & M. R. Uria* (2001). A fuzzy goal programming approach to portfolio selection. - *European Journal of Operational Research*, 133(2), p. 287-297.
- Ross, S. A.* (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. - *Journal of economic theory*, 13(3), p. 341-360.
- Sharpe, W. F.* (1963). A simplified model for portfolio analysis. - *Management science*, 9(2), p. 277-293.
- Tobin, J.* (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. - *The review of economic studies*, p. 65-86.
- Van Horne, J. C., & J. M. Wachowicz* (2008). *Fundamentals of financial management*. Pearson Education.
- Zimmermann, H. G., R. Neuneier, & R. Grothmann* (2001). Active Portfolio-Management based on Error Correction Neural Networks. – In: NIPS, p. 1465-1472.
- Zivot, E.* (2002). *Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics*. University of Washington, Department of Economics.
- www.zse.hr - Zagreb Stock Exchange

Приложение

Гранични портфолия с разрешени къси продажби

alpha	1-alpha	E[Rp,z]	var(Rp,z)	SD(Rp,z)	ADPL, %	ATGR, %	LEDO, %	PODR, %
2	-1	0.0089	0.0025	0.0505	23	93	13	-30
1.9	-0.9	0.0090	0.0024	0.0488	24	88	15	-26
1.8	-0.8	0.0092	0.0022	0.0473	25	82	16	-23
1.7	-0.7	0.0093	0.0021	0.0458	25	77	18	-20
1.6	-0.6	0.0095	0.0020	0.0446	26	71	19	-16
1.5	-0.5	0.0096	0.0019	0.0435	26	66	21	-13
1.4	-0.4	0.0098	0.0018	0.0426	27	60	22	-10
1.3	-0.3	0.0100	0.0018	0.0418	27	55	24	-6
1.2	-0.2	0.0101	0.0017	0.0413	28	49	26	-3
1.1	-0.1	0.0103	0.0017	0.0410	29	44	27	0
1	0	0.0104	0.0017	0.0409	29	39	29	4
0.9	0.1	0.0106	0.0017	0.0410	30	33	30	7
0.8	0.2	0.0107	0.0017	0.0413	30	28	32	10
0.7	0.3	0.0109	0.0018	0.0418	31	22	34	13
0.6	0.4	0.0110	0.0018	0.0426	31	17	35	17
0.5	0.5	0.0112	0.0019	0.0435	32	11	37	20
0.4	0.6	0.0114	0.0020	0.0446	33	6	38	23
0.3	0.7	0.0115	0.0021	0.0458	33	0	40	27
0.2	0.8	0.0117	0.0022	0.0473	34	-5	41	30
0.1	0.9	0.0118	0.0024	0.0488	34	-11	43	33
0	1	0.0120	0.0025	0.0505	35	-16	45	37
-0.1	1.1	0.0121	0.0027	0.0523	35	-22	46	40
-0.2	1.2	0.0123	0.0029	0.0542	36	-27	48	43
-0.3	1.3	0.0124	0.0032	0.0561	37	-32	49	47
-0.4	1.4	0.0126	0.0034	0.0582	37	-38	51	50
-0.5	1.5	0.0127	0.0036	0.0604	38	-43	52	53
-0.6	1.6	0.0129	0.0039	0.0626	38	-49	54	56
-0.7	1.7	0.0131	0.0042	0.0648	39	-54	56	60
-0.8	1.8	0.0132	0.0045	0.0672	39	-60	57	63
-0.9	1.9	0.0134	0.0048	0.0695	40	-65	59	66
-1	2	0.0135	0.0052	0.0719	41	-71	60	70
-1.1	2.1	0.0137	0.0055	0.0744	41	-76	62	73
-1.2	2.2	0.0138	0.0059	0.0769	42	-82	64	76
-1.3	2.3	0.0140	0.0063	0.0794	42	-87	65	80
-1.4	2.4	0.0141	0.0067	0.0820	43	-92	67	83
-1.5	2.5	0.0143	0.0071	0.0845	43	-98	68	86
-1.6	2.6	0.0144	0.0076	0.0871	44	-103	70	90
-1.7	2.7	0.0146	0.0081	0.0898	45	-109	71	93
-1.8	2.8	0.0148	0.0085	0.0924	45	-114	73	96
-1.9	2.9	0.0149	0.0090	0.0951	46	-120	75	99

Забележка. Всички портфолия лежат на граничното портфолио, но само тези с $\mu \geq \mu_{p,m}$ са ефективни.

Евристичен подход за определяне на ефективни гранични портфолия с повече от два актива...

Гранични портфолия – без разрешени къси продажби

alpha	1-alpha	E[Rp,z]	var(Rp,z)	SD(Rp,z)	ADPL, %	ATGR, %	LEDO, %	PODR, %
0	1	0.0089	0.00296	0.0544	0	100	0	0
0.1	0.9	0.009	0.00271	0.0521	3	94	3	0
0.2	0.8	0.0092	0.00249	0.0499	6	88	6	1
0.3	0.7	0.0093	0.0023	0.048	9	82	9	1
0.4	0.6	0.0095	0.00213	0.0462	12	75	12	1
0.5	0.5	0.0096	0.00199	0.0446	15	69	14	2
0.6	0.4	0.0098	0.00188	0.0433	17	63	17	2
0.7	0.3	0.01	0.00179	0.0423	20	57	20	2
0.8	0.2	0.0101	0.00172	0.0415	23	51	23	3
0.9	0.1	0.0103	0.00169	0.0411	26	45	26	3
1	0	0.0104	0.00167	0.0409	29	39	29	4
0.9	0.1	0.0106	0.0017	0.0412	26	35	26	13
0.8	0.2	0.0107	0.00178	0.0422	23	31	23	23
0.7	0.3	0.0109	0.00192	0.0438	20	27	20	32
0.6	0.4	0.011	0.00211	0.0459	17	23	17	42
0.5	0.5	0.0112	0.00235	0.0485	15	19	14	52
0.4	0.6	0.0114	0.00265	0.0515	12	15	12	61
0.3	0.7	0.0115	0.00301	0.0548	9	12	9	71
0.2	0.8	0.0117	0.00341	0.0584	6	8	6	81
0.1	0.9	0.0118	0.00388	0.0623	3	4	3	90
0	1	0.012	0.00439	0.0663	0	0	0	100

Забележка. Първата част на таблицата се изчислява като изпъкнали функции на ATGR и на общото минимално портфолио, а втората част са изпъкнали функции на общото минимално портфолио и на PODR. Само портфолия с $\mu \geq \mu_{p,m}$ са ефективни.

2.X.2015 г.